

ハミルトニアンシステムの受動性に基づく安定化制御

80123533 持田 正彦

指導教員 志水 清孝

1. 概要

ハミルトニアンシステムとは、ハミルトンの正準方程式で表されるシステムで、エネルギーを保存する系の挙動を表すものである。この形式は物理システムのもつ受動性などの特徴を陽に表した形式であり、これらの受動性を陽に表した系に特化した制御方を確立すれば、一般の非線形システムを対象にするよりも簡単に効果的な手法が得られると期待されている。

そこで本論文では、ハミルトニアンシステムの受動性に着目し、この受動性を用いた安定化手法により、各制御対象を漸近安定化することを目的とする。しかし非ホロノミックシステムは、システムが受動的ではなく、本手法を直接適用して漸近安定化することができない。そこで一般化正準変換を用い、非ホロノミックシステムを受動的なシステムに変換する。その後、受動性を用いた本手法により漸近安定化を行う。

一般化正準変換とは、古典力学における正準変換の自然な拡張であり、座標変換、ハミルトニアンの変換、出力関数の取り替え及び状態フィードバックの組によって、一般化ハミルトニアンシステムを見通しよく、受動性の性質を明確に表すための変換である。

最後にハミルトニアンシステムで表されている各制御対象に対し、一般化正準変換により受動的なシステムに変換し、漸近安定化シミュレーションすることにより、本手法の有効性を確認した。

2. 受動的なシステムの安定性

受動的なシステムの安定性を述べる時に必要な LaSalle の定理を以下に挙げる。

LaSalle の定理^[1]

状態ベクトルを $q \in R^n$ として、次の微分方程式を考える。

$$\dot{q} = f(q)$$

空間 R^m の中に、あるコンパクトな集合 Ω があって、 Ω から出発する解はずっと Ω に留まっているとする。また、連続な偏微分をもつような正定値関数 $V(q) \geq 0$ ($q \neq 0$)、 $V(0) = 0$ があって、上記の微分方程式の解軌道に沿った時間微分が Ω において正にはならないとする。すなわち、

$$\dot{V}(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} f_i(q) \leq 0$$

とする。次に、 $\dot{V}(q) = 0$ を満足する Ω の点の集まりを E で表し、 E における最大の不变集合を M で表す。その時、 Ω の中から出発する方程式の全ての解は $t \rightarrow \infty$ の時、限りなく集合 M に近づく。

3. 安定化制御手法

3.1 一般化ハミルトニアンシステム

一般化ハミルトニアンシステムとは、Hamilton の正準方程式を用いて表したシステムであるハミルトニアンシステムを拡張したシステムである。この一般化ハミルトニアンシステムの入出力が無損失であることを利用して、出力を直結フィードバックすることで入出力が零になる不变集合に安定化できる事がわかっていてる。

ここで、 q を状態、 u, y を入出力とした時、一般化ハミルトニアンシステムは次のように表される。

$$\begin{cases} \dot{q} = J(q) \frac{\partial \mathcal{H}^T(q)}{\partial q} + g(q)u \\ y = g^T(q) \frac{\partial \mathcal{H}^T(q)}{\partial q} \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $q \in R^n$ 、 $u, y \in R^m$ で、 $J(q) \in R^{n \times n}$ は歪対称行列である。

n が偶数で $J(q), g(q)$ が次の形であるとき、システム (1) をハミルトニアンシステムという。

$$J(q) \equiv \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}, \quad g(q) = \begin{bmatrix} O \\ B \end{bmatrix}$$

ここで、 I は $n/2$ 次の単位行列、 B は定数行列である。

3.2 安定化手法

一般化ハミルトニアンシステムに対して、様々な安定化制御手法が挙げられるが、本論文では、制御対象が非ホロノミックなシステムであることから、非ホロノミックなシステムを受動的なシステムに変換することができる、一般化正準変換を用いた安定化手法を採用した。

ここで、一般化正準変換の定義を書く。

[定義] 一般化正準変換

時変一般化ハミルトニアンシステムの一般化正準変換とは、次のような座標変換、ハミルトニアンの変換、出力関数の取り替え及び状態フィードバックの組で、新しい座標 (\bar{q}, \bar{p}) 上で入出力 $\bar{u} \rightarrow \bar{y}$ のダイナミクスを表したときにハミルトニアン $\bar{\mathcal{H}}(q, p, t)$ を持つ時変一般化ハミルトニアンシステムとなるものとする。

$$\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \Phi(q, p, t) \quad (2a)$$

$$\bar{\mathcal{H}}(q, p, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + U(q, p, t) \quad (2b)$$

$$\bar{y} = \alpha(q, t) + y \quad (2c)$$

$$\bar{u} = \beta(q, t) + u \quad (2d)$$

ただし、 $U(q, p, t), \alpha(q, t), \beta(q, t)$ はそれぞれ適当なスカラー関数及びベクトル関数である。

この変換を用いて、直結フィードバック

$$\bar{u} = -\beta(q, t) - \bar{y}$$

を制御入力とし、漸近安定化を行う。またこの時、 $\mathcal{H}(q, p, t) + U(q, p, t)$ は原点で極小値をとり、変換されたシステムは零状態可検出であるとする。^[2]

ここでの各パラメータの計算は以下の通りであった。 $U(q, p, t)$ はフリーパラメータで、 $\beta(q, t)$ は、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial (q, p)} J(q, t) \frac{\partial U(q, p, t)^T}{\partial x} \\ & + \frac{\partial (\mathcal{H}(q, p, t) + U(q, p, t))}{\partial (q, p)} g(q) \beta(q, t) - \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(q, p, t)}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

より求め、 $\alpha(q, t)$ は

$$\alpha(q, t) = g^T(q, t) \frac{\partial U(q, p, t)^T}{\partial (q, p)}$$

によって決まる関数である。

以上の変換より求められた各パラメータを用いる。

4. 制御対象とシミュレーション

4.1 質点系の運動

質量 m の質点の 2 次元での運動は、座標を $q = (x, y)^T$ として、

$$m\ddot{q} = u \quad (3)$$

で表される．この時、運動量 p を $p = m\dot{q}$ ，ハミルトニアンを $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}m\dot{q}^T\dot{q} = \frac{1}{2m}p^Tp$ として、一般化ハミルトニアンシステムで書き表し、一般化正準変換を施すと次が得られる．

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \bar{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \bar{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ mI \end{bmatrix} u \quad (4a)$$

$$\bar{y} = [O, mI] \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \bar{q}} \\ \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \bar{p}} \end{bmatrix} \quad (4b)$$

$$\bar{\mathcal{H}}(q, p, t) = \frac{1}{2m}(\bar{p} + k \int \bar{q} dt)^T(\bar{p} + k \int \bar{q} dt) + \frac{k}{2}\bar{q}^T\bar{q} \quad (4c)$$

この一般化ハミルトニアンシステムに対して直結フィードバック

$$u = -\frac{k}{m}q - p \quad (5)$$

を適用することにより、漸近安定化を行った．シミュレーション

初期点を $q(0) = (2.0, -1.0)^T$ としたシミュレーション結果を以下に示す．ここで左側が自由応答、右側が q, p の安定化制御結果である．

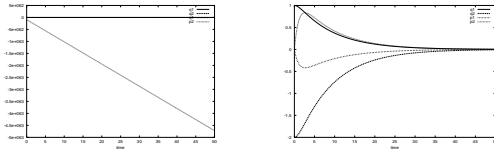


Fig.1 質点系の運動 $q(0) = (2.0, -1.0)^T$

また、初期点を $q(0) = (1.5, -1.5)^T$ とした結果を以下に示す．

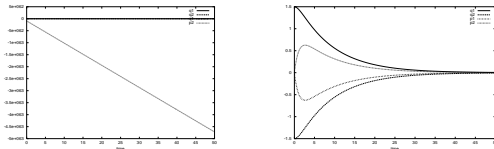


Fig.2 質点系の運動 $q(0) = (1.5, -1.5)^T$

4.2 ロボットマニピュレータ

ロータに巻かれたコイルに印加するサーボモータは電圧 v_a 抵抗 R_a とし、 k_i はモータの減速比、 b_{0i} は減速機の粘性摩擦係数、 K_i はモータ定数とした時、2-Link マニピュレータの状態方程式は次のように表せる．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\{J_0 + R(x_1)\}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{2}\dot{R}(x_1) + S(x_1, x_2) + B_0 \right) x_2 + g(x_1) \right\} \\ + \begin{bmatrix} O \\ \{J_0 + R(x_1)\}^{-1} D \end{bmatrix} u \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{cases} J_0 = \text{diag}(J_{ii}), & B_0 = \text{diag}(b_{ii}), & D = \text{diag}(d_{ii}) \\ J_{ii} = k_i^2 J_i, & b_{ii} = (b_{0i} + \frac{k_i^2}{R_{ai}})k_i^2, & d_{ii} = \frac{k_i K_i}{R_{ai}} \end{cases}$$

$$R(x_1) = \begin{bmatrix} I_1 + m_1 s_1^2 + I_2 + m_2(l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos x_{12}) & I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos x_{12}) \\ I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos x_{12}) & I_2 + m_2 s_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R}(x_1) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 s_2 x_{22} \sin x_{12} & -m_2 l_1 s_2 x_{22} \sin x_{12} \\ -m_2 l_1 s_2 x_{22} \sin x_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 s_2 x_{22} \sin x_{12} & -\frac{1}{2}m_2 l_1 s_2 x_{22} \sin x_{12} \\ m_2 l_1 s_2 x_{21} \sin x_{12} & \frac{1}{2}m_2 l_1 s_2 x_{21} \sin x_{12} \end{bmatrix}$$

$$g(x_1) = \begin{bmatrix} m_1 g s_1 \cos x_{11} + m_2 g \{l_1 \cos x_{11} + s_2 \cos(x_{11} + x_{12})\} \\ m_2 g s_2 \cos(x_{11} + x_{12}) \end{bmatrix}$$

これを $p = \frac{\partial L(q, \dot{q})^T}{\partial \dot{q}}$ を用いて、ハミルトニアンシステムに変換する．ここで、ハミルトニアン $\mathcal{H}(q, p)$ は、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q, p) &= \frac{1}{2\{\det R(q)\}^2} \{ (m_1 s_1^2 + I_1 + m_2(l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos q_2) + I_2) \\ &\times ((I_2 + m_2 s_2^2)p_1 - \{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}p_2)^2 \\ &+ 2(m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2) + I_2) \times ((I_2 + m_2 s_2^2)p_1 - \{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}p_2) \\ &\times (-\{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}p_1 + \{I_1 + m_1 s_1^2 + I_2 + m_2(l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos q_2)\}p_2) \\ &+ (I_2 + m_2 s_2^2) \times (-\{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}p_1 \\ &+ \{I_1 + m_1 s_1^2 + I_2 + m_2(l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos q_2)\}p_2)^2 \\ &+ \{m_1 g s_1 \cos q_1 + m_2 g l_1 \cos q_1 + m_2 g s_2 \cos(q_1 + q_2)\} \end{aligned}$$

と計算される．このハミルトニアン $\mathcal{H}(q, p)$ を (1) に代入することにより、2-Link マニピュレータの一般化ハミルトニアンシステムが導出される．

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\det\{J_0 + R(q)\}} F_1 \\ -\frac{m_2 l_1 s_2 \sin q_2}{(\det\{J_0 + R(q)\})^2} F_2 - F_3 - \det\{J_0 + R(q)\} B_0 \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

ここでそれぞれのパラメータは次の通りである．

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{bmatrix} (J_2 + I_2 + m_2 s_2^2)p_1 - (m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2))p_2 \\ -(I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2))p_1 + (J_1 + I_1 + m_1 s_1^2 + I_2 + m_2(l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_1 \cos q_2))p_2 \end{bmatrix} \\ F_2 &= ((J_2 + I_2 + m_2 s_2^2)p_1 - \{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}p_2) \\ &\times (-\{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}p_1 + \{J_1 + I_1 + m_1 s_1^2 + I_2 + m_2(l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_1 \cos q_2)\}p_2) \\ &+ ((J_2 + I_2 + m_2 s_2^2)p_1 - \{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}p_2)^2 \\ F_3 &= \begin{bmatrix} -m_1 g s_1 \sin q_1 - m_2 g \{l_1 \sin q_1 + s_2 \sin(q_1 + q_2)\} \\ -m_2 g s_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \det\{J_0 + R(q)\} &= \{J_1 + I_1 + m_1 s_1^2 + I_2 + m_2(l_1^2 + s_2^2 + 2l_1 s_2 \cos q_2)\} \{J_2 + I_2 + m_2 s_2^2\} \\ &- \{I_2 + m_2(s_2^2 + l_1 s_2 \cos q_2)\}^2 \end{aligned}$$

である．導出された一般化ハミルトニアンシステムに対し、一般化正準変換 (2) を適用することにより、漸近安定化を行う．

5. 結論と考察

一般化正準変換を用いることによりシステムを受動的なシステムに変換し、直結フィードバックによって漸近安定化するという本手法は、質点系の運動のシミュレーションにより有効性が確認された．

ただし、質点系の運動という比較的単純な形をしているシステムにおいては、シミュレーションすることが出来た．しかし、ロボットマニピュレータのようなハミルトニアン $\mathcal{H}(q, p)$ が複雑な形をした制御対象に対しても本手法は適用できるはずであるが、ハミルトニアンシステムに書き換える際の偏微分計算及び一般化正準変換のための変換計算が非常に複雑なため時間がかかり、現時点ではシミュレーションが成功するまでには至っていない．今後の課題としたい．

6. 参考文献

- [1] Suguru Arimoto, Control Theory of Non-linear Mechanical Systems, OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS, 1996
- [2] 藤本健治, ハミルトニアンシステムの制御, 計測と制御, vol.39, no.2, pp.99-104, 2000