No.2002-09-05

L^p ノルムを用いた最適制御に関する研究

89922877 村上友洋 指導教員 志水清孝

1 概要

L^p 最適制御に関しては L^1 ノルムで表された外乱の最小化などの研究 [1] を口火に現在では複数の制約を L^p ノルムもしくは H^∞ ノルムで表現した系を準最適化することなども考えられている. 本論文では評価関数自体を L^p ノルムで表現することを中心に据えており, その中で荷重 L^p ノルムを提案し, それを用いた最適制御問題も提案している. また最後には L^2/H^∞ 最適制御を提案しており, これは評価関数を L^2 ノルムで表現し, 制約部分を H^∞ ノルムで表現している.

2 L^p 最適制御

L^p 最適制御問題では状態変数及び入力を L^p ノルムで表現したもので構成される. ここで問題は

$$\begin{cases} \underset{\boldsymbol{u}(\cdot)}{min}\, J[\boldsymbol{u}(\cdot)] \triangleq \left(\|Q\boldsymbol{x}\|^p_{L^p_{[t_0,t_1]}} + \|\boldsymbol{u}\|^p_{L^p_{[t_0,t_1]}} \right) \\ \quad = \int_{t_0}^{t_1} \left(q(\sum_{i=1} x_i^2(t))^{\frac{1}{2}} \right)^p + \left(\sum_{i=1} u_i^2(t) \right)^{\frac{p}{2}} dt \\ subj.to \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{1}$$

最適解を求める際に最も重要な関数である Hamilton 関数は (2) 式のようになる.

$$H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t) \triangleq \left\{ q(\sum_{i=1} x_i^2(t))^{\frac{1}{2}} \right\}^p + \left(\sum_{i=1} u_i^2(t) \right)^{\frac{p}{2}} + \boldsymbol{\psi}^T(t) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \tag{2}$$

最適解は以下のように求まる.

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i(t) = -pq^p x_i(t) \cdot \left(\sum_{i=1} x_i^2(t) \right)^{\frac{p}{2}-1} \\ \quad -\psi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \psi_i(t_1) = 0 \\ 0 = pu_i(t) \cdot \left(\sum_{i=1} u_i^2(t) \right)^{\frac{p}{2}-1} \\ \quad + \psi_i(t) \frac{\partial}{\partial u_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{3}$$

3 荷重型 L^p 最適制御

3.1 荷重型 L^p ノルム

荷重型 L^p ノルムには 2 通り考えることができる. 一つは時間荷重型であり, もう一つは誤差荷重型である. 時間荷重型 L^p ノルムは

$$\|F\|_{L^p_{[t_0,t_1]}} = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\|^p e^{\alpha p t} dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \alpha > 0 \tag{4}$$

となる. これを適用させることにより応答時間の短縮をはかることができる. 次に誤差荷重型 L^p ノルムを定義すると

$$\|F\|_{L^p_{[t_0,t_1]}} = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|F(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\|^p e^{\boldsymbol{x}(t)^T \boldsymbol{x}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

となる. 本論文では目標応答を 0 とするので状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$ そのものが誤差となる.

3.2 時間荷重型 L^p 最適制御

この節では時間荷重型 L^p 最適制御のみを扱うことにする. この制御問題は

$$\begin{cases} \underset{\boldsymbol{u}(\cdot)}{min}\, J[\boldsymbol{u}(\cdot)] \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \left(\|Q\boldsymbol{x}(t)\|^p + \|\boldsymbol{u}(t)\|^p \right) e^{\alpha p t} dt \\ \quad = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (q(\sum_{i=1} x_i^2(t))^{\frac{1}{2}})^p + (\sum_{i=1} u_i^2(t))^{\frac{p}{2}} \right\} e^{\alpha p t} dt \\ \alpha > 0 \\ subj.to \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{6}$$

と定義される. この式から Hamilton 関数は以下のように導かれる.

$$H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t) \triangleq \left\{ (q(\sum_{i=1} x_i^2(t))^{\frac{1}{2}})^p + (\sum_{i=1} u_i^2(t))^{\frac{p}{2}} \right\} e^{\alpha p t} + \boldsymbol{\psi}^T(t) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \tag{7}$$

これより最適解は

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{\psi}_1(t) = -pq^p x_i(t) \cdot \left(\sum\limits_{i=1} x_i^2(t) \right)^{\frac{p}{2}-1} e^{\alpha p t} \\
-\psi_i(t) \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \psi_i(t_1) = 0 \\
0 = p u_i(t) \cdot \left(\sum\limits_{i=1} u_i^2(t) \right)^{\frac{p}{2}-1} e^{\alpha p t} \\
+\psi_i(t) \dfrac{\partial}{\partial u_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \\
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)
\end{array}
\right. \tag{8}
$$

と設計される.

4 L^2/H^∞ 最適制御

L^2 ノルムで表現された評価関数を H^∞ ノルムで表現された制約式を満たしながら最小化していく制御則を本論文では L^2/H^∞ 最適制御と呼ぶ. 制約条件として $\boldsymbol{u}$ の周波数領域での動作が原点から半径 γ 以内で収まるような条件を設定した. 以下に問題を示した.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\min\limits_{\boldsymbol{u}(\cdot)} J[\boldsymbol{u}(\cdot)] \triangleq \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{x}^T(t) Q \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t) \boldsymbol{u}(t) dt \\
subj.to \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\
\|g(\boldsymbol{u})\|_\infty \leq \gamma \qquad (\geq 0)
\end{array}
\right. \tag{9}
$$

4.1 H^∞ 問題への変換

ここでは問題 (9) の L^2 最適制御問題部分の最適解のみを先に導出し, 新たに定義されるシステムに対して安定化制御器を取り付け制約条件を満たしていくことを目的としている. L^2 最適解は

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) - \frac{1}{2} B B^T \boldsymbol{\psi}(t) \\
\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = -q\boldsymbol{x}(t) - A^T \boldsymbol{\psi}(t)
\end{array}
\right. \tag{10}
$$

となる. ここで $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{x}^T(t) \quad \boldsymbol{\psi}^T(t))^T$ とすると, (10) 式は

$$
\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BB^T \\ -qI & -A^T \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}(t) \tag{11}
$$

となる. 問題 (9) の制約条件を満たすために (11) 式に安定化制御器 K 付きのフィードバックをかけることにする. (11) 式に新たな入力 $\bar{u}(t)$ を付け加えることにより問題 (9) は

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BB^T \\ -qI & -A^T \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{u}}(t) \\
\quad = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{u}}(t) \\
\|\bar{g}(\psi)\|_\infty \leq \bar{\gamma} \quad (\geq 0)
\end{array}
\right. \tag{12}
$$

と書き換えることが出来る. この式の 2 項目の説明:問題 (9) での制約対象は $\boldsymbol{u}$ であり, $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{\psi}$ で表現出来るのでこれは制約対象を $\boldsymbol{\psi}$ とすることを可能としている. $\bar{g}$ は状態変数から出力変数への変換誤差であるとすることが出来るので $\bar{g}$ の代わりに Δ を用い, また安定化制御器 K

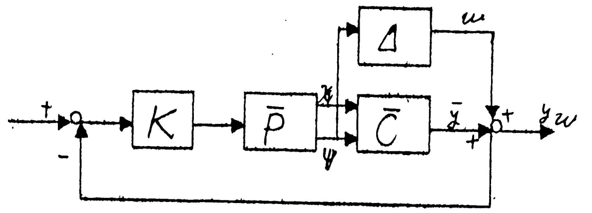

Fig.1: 出力に関するロバスト安定化システム

を取り付けた時の系は となる. 安定化制御器 K を取り付けたことにより入力 $\bar{u}(t)$ は

$$
\bar{u}(t) = -K\{\bar{y}(t) + \omega(t)\} = -K\{\bar{C}\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \omega(t)\} \tag{13}
$$

となる. また

$$
|\Delta(j\omega)| \leq |W_a(j\omega)|, \quad \forall \omega \in R \tag{14}
$$

を満たす安定かつプロパーなスカラ実有理関数 $W_a(s)$ を存在すると仮定する. さらに $W_a(s)$ の最小実現が

$$
\Sigma_{W_a} \left\{
\begin{array}{l}
\dot{\boldsymbol{x}}_a(t) = A_a \boldsymbol{x}_a(t) + B_a \boldsymbol{\psi}(t) \\
z(t) = C_a \boldsymbol{x}_a(t) + D_a \boldsymbol{\psi}(t)
\end{array}
\right. \tag{15}
$$

で与えることが出来るとする. 系が安定となるためには
(1) 閉ループ系 $\Sigma_{G_{\omega z}}$ が漸近安定
(2) $\|G_{\omega z}\|_\infty < \bar{\gamma}$
を満たす K を求める必要がある.

4.2 安定化制御器設計法

系の伝達関数 $G_{\omega z}$ は

$$
G_{\omega z} = -W_a[0 \quad I](I + \bar{P}K\bar{C})^{-1}\bar{P}K \tag{16}
$$

となる. ここで $G_{\omega z}$ の最小実現が

$$
\Sigma_{G_{\omega z}} \left\{
\begin{array}{l}
\dot{\boldsymbol{x}}_z(t) = A_z \boldsymbol{x}_z(t) + \boldsymbol{b}_z \omega(t) \\
z(t) = C_z \boldsymbol{x}_z(t) + D_z \omega(t)
\end{array}
\right. \tag{17}
$$

とすることが出来るとすると $\|G_{\omega z}\|_\infty \leq \bar{\gamma}$ となる必要十分条件は [2]

$$
PA_z + A_z^T P + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} P \boldsymbol{b}_z \boldsymbol{b}_z^T P + C_z^T C_z = 0 \tag{18}
$$

を満たす実準正定解 P が存在するような K を設定することである.

[参考文献]
[1]Zi-Qin Wang, Mario Sznaier, L^∞-Optimal control of SISO Continuous Time Systems and It's Rational Approximation, IEEE Conf Decision and Control, pp34-39, 1994.
[2] 吉川恒夫, 井村順一, 現代制御論, 昭晃堂, 1994.