

非最小位相システムに対する並列フィードフォワード補償器による受動化

80122736 出崎 聡

指導教員 大森 浩充

1 研究の背景と目的

与えられたシステムを受動化することは、全系の安定性、ロバスト安定性、保全性などの観点から、重要なシステム構成手法として認識されている。従来の受動化法を受動化補償器の配置に着目して分類すると、(a) 直列補償法、(b) フィードバック補償法、(c) フィードフォワード補償法の3種類に分類できる。(a),(b)の手法は、受動化されるシステムが最小位相系で1次の相対次数の場合に限られる。本論文では、受動化法として有用な(c)の構成法を用い、非線形非最小位相システムに対して実用的な受動化補償器の設計法を提案し、その有効性を数値例により確認した。

2 問題設定

次のような可安定な SISO 非線形アフィンシステムを考える。

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1)$$

$x \in \mathbf{R}^n$ は状態, $u \in \mathbf{R}$ は入力, $y \in \mathbf{R}$ は出力, $f(x) \in \mathbf{R}^n$, $g(x) \in \mathbf{R}^n$, $h(x) \in \mathbf{R}$ である。

仮定 (1) 式は相対次数 2 以上 ($\frac{\partial h}{\partial x}g = 0$) で非最小位相系。

目的は (1) 式にフィードフォワード補償器

$$V: \begin{cases} \dot{\eta} = k(\eta) + m(\eta)u \\ y_\eta = \ell(\eta) \end{cases} \quad (2)$$

を施し、拡大システム ($\Sigma + V$) を相対次数 1, 最小位相系にし、フィードバック補償

$$u = -F(\bar{y}) + v \quad (3)$$

により、 v から $\bar{y}$ を受動化することである。($\bar{y} = y + y_\eta$)

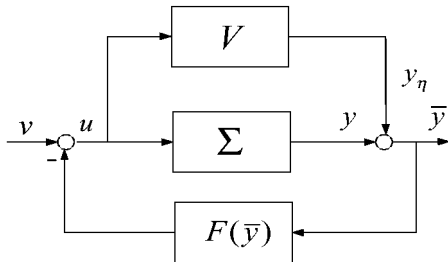


図 1: 問題設定

3 フィードフォワード補償器の設計

まず、拡大システムの出力の時間微分は次のようになる。

$$\dot{\bar{y}} = L_f h + \frac{\partial \ell}{\partial \eta} k(\eta) + \frac{\partial \ell}{\partial \eta} m(\eta)u \quad (4)$$

(4) 式から

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta} m(\eta) = 1 \quad (5)$$

とすると、(4) 式の相対次数は 1 になる。ただし、 $g(x) = b$ ならば、 $\frac{\partial \ell}{\partial \eta} m(\eta)$ は任意の非零関数とおける。

それから、次のような座標変換を施す。

$$\begin{cases} \xi = x + (\int_0^{-\eta} e^{\frac{\partial g}{\partial x} x d\tau})g(x) \\ \bar{y} = h(x) + \ell(\eta) \end{cases} \quad (6)$$

すると、次のような標準形が得られる。

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) - g(\xi)(L_f h - L_h k)(L_f h - \frac{\partial k}{\partial \xi})\bar{y} \\ \dot{\bar{y}} = L_f h + L_h \ell + u \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式を導出する際に $\frac{\partial \ell}{\partial \eta} k(\eta) = \frac{\partial k}{\partial \eta} \ell(\eta)$ と仮定した。(7) 式からゼロダイナミクスは ($\bar{y} = 0$)

$$\dot{\xi} = f(\xi) - g(\xi)(L_f h - L_h k)h(\xi) \quad (8)$$

となる。すると、次のような定理が得られる。

定理 1 (8) 式が安定になるように $k(\eta)$ を決定するために次の仮想システムを考える。

$$\Sigma_\xi: \begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)\bar{u} & \xi \in \mathbf{R}^n \\ y_\xi = \begin{bmatrix} h(\xi) \\ L_f h(\xi) \end{bmatrix} & y_\xi \in \mathbf{R}^2 \end{cases} \quad (9)$$

(9) 式に対する SOF(Static Output Feedback) 問題を解き、ゲイン $\bar{F}(\xi)$ を $\bar{F}(\xi) = \begin{bmatrix} \bar{F}_1(\xi) & 1 \end{bmatrix}$ と分解する。 $\bar{F}_1(\xi) \in \mathbf{R}$

注意 (9) 式に対する SOF 問題について考える。

(9) 式に対して、

$$\bar{u} = -\bar{F}(\xi)y_\xi = -\bar{F}_1(\xi)h(\xi) - L_f h(\xi)$$

を入力とすると次式が得られる。

$$\dot{\xi} = f(\xi) - g(\xi)\bar{F}_1(\xi)h(\xi) - g(\xi)L_f h \quad (10)$$

(8) 式と (10) 式を比較すると、

$$\bar{F}_1(\xi) = -\frac{\partial k}{\partial(\ell^{-1}(-h(x)))}$$

上式から $k(\eta)$ を求め、

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta} m(\eta) = 1, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \eta} k(\eta) = \frac{\partial k}{\partial \eta} \ell(\eta)$$

を満足するような $m(\eta)$, $\ell(\eta)$ を求める。すると、拡大システムは相対次数 1, 最小位相系になる。□

4 出力フィードバックゲインの決定法

拡大システム $(\Sigma + V)$ をフィードフォワード補償器により相対次数 1 で最小位相系にしたら v から $\bar{y}$ を受動にするフィードバックゲインは次のように決定できる [1].

定理 2 拡大系の標準形を次のようにおく.

$$\begin{cases} \dot{z} = q_0(z) + q_1(z, \bar{y})\bar{y}, \\ \dot{\bar{y}} = b(z, \bar{y}) + a(z, \bar{y})u \end{cases} \quad (11)$$

(11) 式に対して, 次のような仮定をおく.

仮定 1 $a(z, \bar{y}) = a_1(z)a_0(\bar{y})$ となるような滑らかな関数 $a_1(z) > 0$ と $a_0(\bar{y})$ が存在する.

仮定 2 次の式を満たすような正定関数 ϕ_1, ϕ_2 が存在する.

$$\begin{aligned} & |L_{q_1}^T W(z, \bar{y}) + a_1^{-1}(z)b(z, \bar{y}) + \frac{1}{2}\dot{a}_1^{-1}(z, \bar{y})\bar{y}| \\ & \leq \phi_1(\bar{y})|\bar{y}| + \phi_2(\bar{y})|L_{q_0} W(z)|^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

仮定 1・仮定 2 の元で, (11) 式は次の出力フィードバックによって受動化できる.

$$u = a_0^{-1}(\bar{y})(-\epsilon\bar{y} - \bar{y}\phi_1 - \bar{y}\phi_2^2 + v) \quad (13)$$

□

5 数値例

次のような非線形システムを考える.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = 0.5 \sin x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_2 + u \end{cases}, \quad y = x_2 \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0.5 \sin x_2 + x_3 \\ -2x_2 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, h(x) = x_2$$

(14) 式に対して, 次のような座標変換を施す.

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r^{-1}(\eta)(x_2 + \ell(\eta)) \quad (15)$$

(15) 式から, ゼロダイナミクスは次のようになる.

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\xi_1 - 2\xi_2 - 0.5r^{-1} \sin \xi_2 + r^{-1} \frac{\partial k}{\partial \eta} \xi_2 + (1 - r^{-1})\xi_3 \\ \dot{\xi}_2 = 0.5 \sin \xi_2 + \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -2\xi_2 - 0.5r^{-1} \sin \xi_2 + \frac{\partial k}{\partial \eta} r^{-1} \xi_2 - r^{-1} \xi_3 \end{cases}$$

前式を安定にするために次の仮想システムを考える.

$$\Sigma_{\xi} : \begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(x)\bar{u} & \xi \in R^3 \\ y_{\xi} = \begin{bmatrix} h(\xi) \\ L_f h(\xi) \end{bmatrix} & y_{\xi} \in R^2 \end{cases} \quad (16)$$

に対して, $\bar{u} = -\bar{F}(\xi)y_{\xi} = -\bar{F}_1(\xi)h(\xi) - \bar{F}_2(\xi)L_f h(\xi)$ という入力を入れ, (16) 式と比較すると,

$$\bar{F}_1(\xi) = -r^{-1}(\eta) \frac{\partial k}{\partial \eta}, \quad \bar{F}_2(\xi) = r^{-1}(\eta)$$

$\bar{F}_1(\xi) \geq 0, \bar{F}_2(\xi) > 0$ で (16) 式は安定化可能なので, $\bar{F}_1(\xi) = 1/10, \bar{F}_2 = 10$ とする. すると,

$$r = \frac{1}{10}, \quad k(\eta) = -\eta$$

また,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta} m(\eta) = \frac{1}{10}, \quad \frac{\partial \ell}{\partial \eta} k(\eta) = \frac{\partial k}{\partial \eta} \ell(\eta)$$

より, $\ell(\eta) = \eta, m(\eta) = \frac{1}{10}$ と求めることができる. よって, フィードフォワード補償器は次のように求めることができる.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\eta + \frac{1}{10}u \\ y_{\eta} = \eta \end{cases}$$

安定なゼロダイナミクスのリアプノフ関数は

$$W(\xi) = \frac{1}{2} \xi^T P \xi, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1.5111 & -0.9556 \\ -1.5111 & 6.0526 & 1.7480 \\ -0.9556 & 1.7480 & 1.1348 \end{bmatrix}$$

と算出される. 図 2 にゼロダイナミクスの状態の様子を示した.

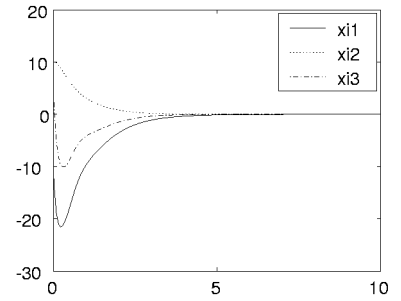


図 2: ゼロダイナミクスの状態の様子

また, 提案法により, (13) 式の ϕ_1, ϕ_2 は次のように求められる.

$$\phi_1 = 100\bar{y}^2, \quad \phi_2 = 43$$

よって, 出力フィードバックは

$$u = -100\bar{y}^3 - 1849\bar{y} + v$$

と求めることができる.

閉ループ系のリアプノフ関数は

$$V = W(\xi) + 5\bar{y}^2 = \frac{1}{2} \xi^T P \xi + 5\bar{y}^2$$

である. 非線形系の受動性を与える KYP 補題を満足していることが確認できた.

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{f}(\tilde{x}) \leq 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \tilde{x}^T} \tilde{g}(\tilde{x}) = \tilde{h}^T(\tilde{x}) \quad (17)$$

参考文献

- [1] Zhong-Ping Jiang and David J.Hill. Passivity and Disturbance Attenuation via Output Feedback for Uncertain Nonlinear Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, pp.992-997, July, 1998.