

非同ーノードと結合むだ時間を有する複雑動的ネットワークの大域的同期

Global Synchronization of Complex Dynamical Networks with Non-identical Nodes and Coupling Time Delays

81017656 李根 (Gen Li) Supervisor: 大森浩充 (Hiromitsu Ohmori)

1. 緒論

近年、複雑動的ネットワークが大きな注目を集めている。複雑動的ネットワークノードとはノードと呼ばれるトポロジ特性を示す動的システムの集合で、ノード間ではリンクで繋がれている。このとき、複雑動的ネットワークのふるまいは各ノードのダイミクスおよびリンクの結合構造によ決定される。この複雑動的ネットワークは交通流解析、インターネットモデル、生物コロニーなどのモデルとして工学、社会学などで多く用いられている。特に、複雑動的ネットワークにおける同期 (synchronization) 問題は近年もっとも注目を集めているテーマの一つであり、多くの研究がなされている。同期とは各ノードの状態量をお互いに一致させることである。しかし、過去の研究において非線形非同ーノード、ノード間伝達にむだ時間が存在する場合の研究は少なかった。

本研究では、非同ーノードと結合むだ時間を有する一般的な複雑動的ネットワークを想定して、大域的同期についての解析を行い、複雑動的ネットワークが同期ための条件の導出を目的とした。

2. モデル

ノード数が N 個、時間遅れ $\tau_j(t) > 0$ の次の非同ーノード複雑動的ネットワークを考える。 $i = 1, \dots, N$ の各ノード i について、次式が成立する

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j(t - \tau_j(t)) \quad (1)$$

ただし、 N はノードの個数、 $x_i(t) \triangleq [x_{i1}(t), \dots, x_{in}(t)]^T \in R^n$ は i 番目ノードの状態、 c はカップリング係数、 $\Gamma \in R^{n \times n}$ は相互結合行列である。行列 $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ は対称かつ、 $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0, i = 1, \dots, N$ である。そして、 f_i は連続微分可能で、そのヤコビアンが Df_i である。そして、各ノードの孤立項部分は $\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t))$ 、 $i = 1, \dots, N$ である。むだ時間 $\tau_j(t)$ は以下の条件を満たす。

$$0 < \tau_j(t) \leq h \leq \infty, \quad 0 \leq |\dot{\tau}_j(t)| \leq \gamma < 1 \quad (2)$$

また、以下の図 1 に $N = 3$ の場合を示した。

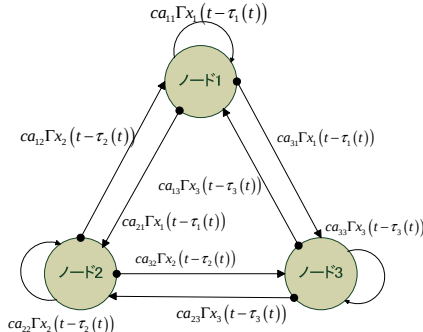


図 1: むだ時間を考慮したネットワークモデル $N = 3$

ネットワーク (1) が同期するということは、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \forall i, j$ である。また、同期において、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, \forall i$ となる関数 $s(t)$ が存在する。

ここで、 $s(t)$ をすべてのノードの孤立項の平衡解とすると、 $\dot{s}(t) = f_i(s(t)), i = 1, \dots, N$ を満たす。そして、偏

差は $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ と定義する。座標変換、 $\omega(t) = [\Phi^T \otimes I_n] e(t) = [\omega_1^T(t), \dots, \omega_N^T(t)]^T$ 、 $\Phi^T A \Phi = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ 、 $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ とする。

3. 同期条件

以下では、I むだ時間に依存しない同期条件、II むだ時間に依存する同期条件を紹介する。I むだ時間に依存しない同期条件が成立しなくなった場合では、II むだ時間に依存する同期条件を用いる必要がある。

以下の二つのリアプノフクラススキー関数を選び、同期条件である次の定理 1 と定理 2 をそれぞれ導出できる。

$$V_i(\omega_i(t)) \triangleq \omega_i^T(t) P_i \omega_i(t) + \int_{t-\tau_i(t)}^t \omega_i^T(\varphi) Q_i \omega_i(\varphi) d\varphi \quad (3)$$

$$V_i(\omega_i(t)) \triangleq \omega_i^T(t) P_i \omega_i(t) + \int_{t-\tau_i(t)}^t \omega_i^T(\varphi) Q_i \omega_i(\varphi) d\varphi + \int_{-\tau_i(t)}^0 \int_{\varepsilon}^0 \dot{\omega}_i^T(t + \eta) Z_i \dot{\omega}_i(t + \eta) d\eta d\varepsilon. \quad (4)$$

I むだ時間に依存しない場合；

$\tau_j(t) \in (0, \infty]$ 、 $|\dot{\tau}_j(t)| \in [0, 1)$ は以下の条件を満たす必要がある。

定理 1:

もし、行列 $\Pi \in R^{n \times n}$ 、および $\alpha \geq 0$ が存在し、

$$\begin{bmatrix} P_i \Pi + \Pi^T P_i + Q_i & \lambda_i(A) c P_i \Gamma \\ \lambda_i(A) c \Gamma^T P_i & -Q_i \end{bmatrix} < -\alpha I \quad (5)$$

ただし、

$$P_i > 0, Q_i > 0$$

$$\left\| \int_0^1 Df_i(s(t) + \theta e_i(t)) d\theta - \Pi \right\| \leq \frac{1}{2} \alpha, \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

を満たすならば、ネットワーク (1) が同期する。

II むだ時間に依存する場合；

$\tau_j(t) \in (0, h]$ 、 $h < \infty$ 、 $|\dot{\tau}_j(t)| \in [0, 1)$ は下式を満たす必要がある。

定理 2:

もし、行列 $\Pi \in R^{n \times n}$ 、 X_i 、 Y_i 、 Z_i 、および $\alpha \geq 0$ が存在し、

$$\begin{bmatrix} (\Theta) & \lambda_i c P_i \Gamma - Y_i & (1 - \gamma) \Pi^T Z_i \\ \lambda_i c \Gamma^T P_i - Y_i^T & -Q_i & (1 - \gamma) \lambda_i c \Gamma^T Z_i \\ (1 - \gamma) Z_i \Pi & (1 - \gamma) \lambda_i c Z_i \Gamma & -(1 - \gamma) Z_i \end{bmatrix} < -\alpha I$$

$$(\Theta) = P_i \Pi + \Pi^T P_i + h X_i + Y_i^T + Y_i + Q_i$$

$$i = 1, \dots, N \quad (7)$$

ただし、

$$P_i > 0, Q_i > 0$$

かつ

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ Y_i^T & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\left\| \int_0^1 Df_i(s(t) + \theta e_i(t)) d\theta - \Pi \right\| \leq \frac{1}{2}\alpha, \quad i = 1, \dots, N$$

(8)

を満たすことならば、ネットワーク (1) が同期する。

4. 数値シミュレーション

ノードが 5 個、つまり、 $N = 5$ の場合;

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^5 a_{ij} \Gamma x_j(t - \tau_j(t))$$

$$f_1(x_1(t)) = \begin{bmatrix} -2.5x_{11} + 0.3x_{12} + 0.9x_{13} + 3x_{13}^2 \\ 0.6x_{11} - 2.6x_{12} + 2x_{12}^2 + x_{13} \\ -2.8x_{11} + \sin x_{11} \cos x_{12} - 2.2x_{13} \end{bmatrix}$$

$$f_2(x_2(t)) = \begin{bmatrix} -2.5x_{21} + x_{22} + x_{21}x_{22} + x_{23} \\ 0.5x_{21} - 0.8x_{22} - \sin x_{22} + x_{23} - x_{23}^2 \\ -2x_{21} - 0.8x_{23} - 0.5 \sin(2x_{23}) \end{bmatrix}$$

$$f_3(x_3(t)) = \begin{bmatrix} -2.5x_{31} + x_{31} \sin x_{31} + x_{32} + 1.4x_{33} \\ 0.5x_{31} - 2.5x_{32} + x_{33} \\ -2x_{31} + x_{32}x_{33} - 0.6x_{33} - x_{33} \cos x_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_4(x_4(t)) = \begin{bmatrix} -2.5x_{41} + 1.5x_{42} + 1.5x_{43} \\ x_{41} - 2.5x_{42} + x_{42}^2 + 1.5x_{43} + x_{43}^2 \\ -2x_{41} + x_{41}x_{43} - 2.5x_{43} \end{bmatrix}$$

$$f_5(x_5(t)) = \begin{bmatrix} -2.1x_{51} + 0.5x_{51}^2 + 1.4x_{52} + x_{53} \\ 0.9x_{51} - 2.1x_{52} + x_{52}x_{53} + x_{53} \\ -2x_{51} + 0.4x_{52} - 2.1x_{53} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1]$$

右側に定理 1 を用いた I むだ時間に依存しない場合、および定理 2 を用いた II むだ時間に依存する場合のシミュレーション結果を示す。ただし、 $\rho_{ij}(t) = x_{ij}(t) - x_{i+1,j}(t)$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, 2, 3$ である。

I むだ時間に依存しない場合；図 2，図 3，図 4

$c \leq 0.2$ ならば、 $h \leq \infty$ ， $|\gamma| < 1$ なので、

$\tau_1(t) = 1.1 + \sin(0.8t)$, $\tau_2(t) = 1.1 + 0.5 \sin(t)$,
 $\tau_3(t) = 1.1 + 0.9 \sin(t)$, $\tau_4(t) = 1.1 + 0.5 \sin(1.4t)$,
 $\tau_5(t) = 1.1 + \sin(0.9t)$ と設定した。

II むだ時間に依存する場合；図 5，図 6，図 7

$c = 1$ とすると、 $h \leq 0.3$ ， $|\gamma| \leq 0.9$ となるので、

$\tau_1(t) = 0.11 + 0.1 \sin(t)$, $\tau_2(t) = 0.15 + 0.1 \sin(t)$,
 $\tau_3(t) = 0.1 + 0.05 \sin(t)$, $\tau_4(t) = 0.15 + 0.1 \sin(9t)$,
 $\tau_5(t) = 0.16 + 0.14 \sin(t)$

5. 結論

非同一ノード・結合むだ時間を有する複雑動的ネットワークの大域的同期条件を、リアプノフクラソフスキー関数を用いて、線形不等式行列式 (LMI) として、I むだ時間に依存しない同期条件・II むだ時間に依存する同期条件、の導出に成功した。

参考文献

- [1] Jun Zhao, David J. Hill, Tao Liu, "Synchronization of Dynamical Networks with Non-identical Nodes; Criteria and Control", IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Paoers, Vol.58, No.3, March 2011.

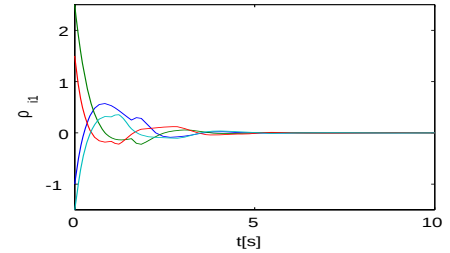


図 2: x_{i1} の誤差軌跡 (I の場合)

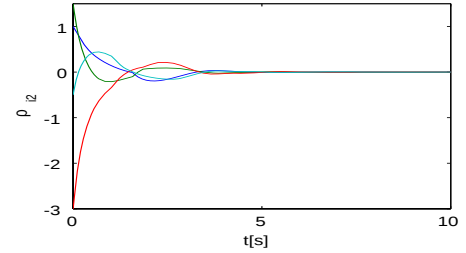


図 3: x_{i2} の誤差軌跡 (I の場合)

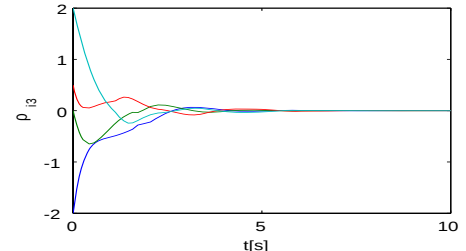


図 4: x_{i3} の誤差軌跡 (I の場合)

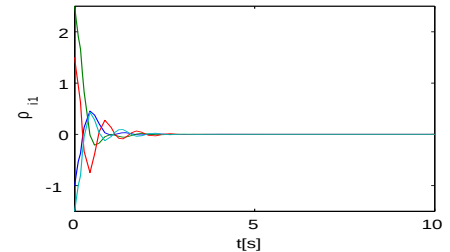


図 5: x_{i1} の誤差軌跡 (II の場合)

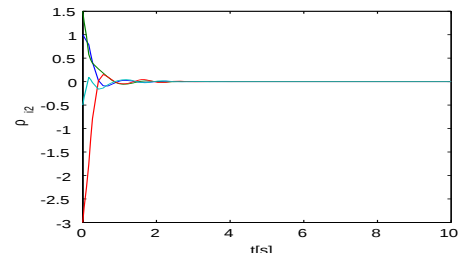


図 6: x_{i2} の誤差軌跡 (II の場合)

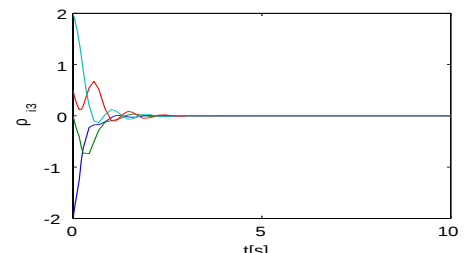


図 7: x_{i3} の誤差軌跡 (II の場合)