

# 通信遅延と経路切り替えに対する合意形成アルゴリズムのロバスト性

## Robustness of Consensus Algorithm for Communication Delays and Switching Topology

80916310 志田宇信 (Takanobu Shida) Supervisor: 大森浩充 (Hiromitsu Ohmori)

### 1. 序論

近年、マルチエージェントシステムの合意形成問題が注目を集めている。合意形成とは各エージェントの状態量を互いに一致させることである。マルチピークルのフォーメーション制御 [1] や、センサネットワークのセンサヒュージョン [2] に合意形成問題が応用されている。マルチエージェントシステムは、ネットワークを形成し、互いに情報を授受して、合意形成を行なう。このとき、一般にネットワーク内では通信遅れが生じ、さらにそれは時間変化する。無向かつ固定のグラフについて、通信遅れの大きさが通信経路の方向に依らないなどの条件の下、平均合意が形成されるための条件が導出されている [3]。本研究では、一般的なネットワークを想定して、有向で可変のグラフについて、安定性を明らかにする。さらに、1 次系の合意形成アルゴリズムを高次系の出力合意形成アルゴリズムに拡張する。

### 2. 通信ネットワークの表現

本稿では、グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  を用いて、通信ネットワークを表現する。図 1 はある通信ネットワークをグラフで表したものである。

各エージェント  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を頂点  $v_i$  で表す。エージェントの集合を  $\mathcal{V}$  とする。

送信側の頂点  $v_j$  から受信側の頂点  $v_i$  への通信経路を辺  $(v_j, v_i)$  で表す。通信経路の集合を  $\mathcal{E}$  とする。 $v_j$  から  $v_i$  への通信経路が存在するとき  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$  と表記し、存在しないとき  $(v_j, v_i) \notin \mathcal{E}$  と表記する。

$(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$  のとき、 $v_j$  を  $v_i$  の近傍と呼ぶ。 $v_i$  の近傍の集合を  $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$  で表す。

$(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$  である全ての  $i, j$  に対して、 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$  が成り立つ (つまり、全ての通信経路が双方向通信である) グラフを無向グラフと呼ぶ。それに対して、そうでない (つまり、少なくとも一つの通信経路が片方向通信である) グラフを有向グラフと呼ぶ。

有向グラフに対して、ある頂点  $v_i$  が存在して、その頂点  $v_i$  から、逐次、辺を辿ることで、任意の  $v_j$  に辿りつげるとき、全域木を含むという。Fig.1 のグラフは、 $v_4$  から全ての頂点に到達可能なので、全域木を含んでいることがわかる。

$\mathcal{E}$  が時間変化する (つまり、通信経路が時間によって切り替わる) グラフを可変グラフと呼ぶ。それに対して、 $\mathcal{E}$  が時間変化するしないグラフを固定グラフと呼ぶ。

### 3. 合意形成則

合意形成の概念は以下のように定義される。

定義 1 次式が成立するとき、合意形成が達成されたという。

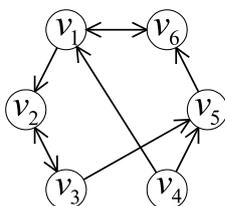


図 1: ネットワーク

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \quad \forall v_i, v_j \in \mathcal{V} \quad (1)$$

ここで、 $x_i \in \mathbb{R}$  はエージェント  $i$  の状態量である。

各エージェントの状態方程式が式 (2) のように与えられているとする。

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) \quad (2)$$

$u_i \in \mathbb{R}$  はエージェント  $i$  への制御入力である。

通信ネットワークは以下の仮定を満たすとする。

仮定 1 グラフは固定で、通信遅れは生じない。

式 (3) のような制御入力を考える。

$$u_i(t) = - \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \quad (3)$$

ここで、 $0 < a_{ij} < \infty$  である。

仮定 1 の下、ネットワークシステム (2),(3) が合意形成を達成するための必要十分条件は、グラフが全域木を含むことであるということが明らかにされている [4]。

### 4. 問題設定

通信ネットワークが以下の仮定を満たすとする。

仮定 2 グラフは可変で、通信経路上で時間遅れが生じる。時間遅れは通信経路毎に異なり、時変である。

状態方程式が式 (2) で与えられる各エージェントに対して、式 (4) のような制御入力を想定する。

$$u_i(t) = - \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ij}(t) (x_i(t) - x_j(t - \tau_{ij}(t))) \quad (4)$$

ここで、 $a_{ij}(t), \tau_{ij}(t)$  は次式を満たす。

$$0 < a_{ij}(t) < \infty$$

$$0 < \tau_{ij}(t) \leq \tau_{\max} < \infty$$

$\tau_{ij}(t)$  は通信経路  $(v_j, v_i)$  間の通信遅れ、 $\tau_{\max}$  は全通信遅れの最大値を表す。 $a_{ij}(t), \tau_{ij}(t)$  は任意に時間変化するものとする。自身の状態のフィードバックループには時間遅れは生じないものとする ( $\tau_{ii} = 0$ )。

本研究では、仮定 2 の下での、ネットワークシステム (2),(4) の安定性を明らかにする。

さらに、1 次系の合意形成アルゴリズム (4) を高次系の出力合意形成アルゴリズムに拡張する。エージェント数を  $n_a$  とする。各エージェント  $i = 1, \dots, n_a$  の状態方程式が次式のように与えられているとする。

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + b_i u_i(t) \\ y_i(t) = c_i^T x_i(t) \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  と  $y_i(t) \in \mathbb{R}$  はエージェント  $i$  の状態量と出力であり、 $n_i$  はエージェント  $i$  の次数である。次数  $n_i$  はエージェントごとに異なっていてもよいとする。

全てのエージェントの状態方程式は以下の仮定を満たすとする。

仮定 3 可制御であり、全ての零点は負の実数であり、相対次数は 1 以上とする。

ここでは、状態方程式 (5) は可制御正準系であるとする。

この条件下、全エージェントの出力値  $y_i(t)$ , ( $i = 1, \dots, n_a$ ) を合意形成させることを制御目的とする。

## 5. 主要結果

本研究により、以下の 3 つの定理が明らかになった。

定理 1 仮定 2 の下、ネットワークシステム (2), (4) は安定である。さらに、ある時刻  $t_0$  以後の任意のエージェント  $v_i, v_k$  の状態量の偏差は式 (6) を満足する。

$$\begin{aligned} & |x_i(t) - x_k(t)| \\ & \leq \max_{v_j \in \mathcal{V}, \tau \in [0, \tau_{\max}]} (x_j(t_0 - \tau) - \min_{v_j \in \mathcal{V}, \tau \in [0, \tau_{\max}]} (x_j(t_0 - \tau)) \end{aligned} \quad (6)$$

定理 2 の準備として、定義 2 を示す。

定義 2 ネットワークが可変とする。辺  $(v_j, v_i)$  に対して重み  $a_{ij}$  が式 (7) を満足するとき、その辺  $(v_j, v_i)$  を  $(v_j, v_i)_T$  と表記する。また、 $(v_j, v_i)_T$  の集合を  $\mathcal{E}_T$  とおく。

$$\begin{aligned} & \int_{t-T}^t a_{ij}(s) ds > 0, \quad \exists T < \inf, \forall t \quad (7) \\ & \begin{cases} a_{ij}(t) > 0, & v_j \in \mathcal{N}_i(t) \\ a_{ij}(t) = 0, & v_j \notin \mathcal{N}_i(t) \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$  は時間変化するが、 $\mathcal{E}_T$  は時間変化しない。

定理 2 グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  が仮定 2 を満たすとする。このとき、グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  から得られるグラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$  が全域木を含むならば、ネットワークシステム (2), (4) は合意形成する。

つぎに、SISO のマルチエージェントシステムに出力の合意形成を達成させる制御入力として、次式のような制御則を提案する。

$$\begin{aligned} u_i(t) = & \bar{\beta}_i^{-1} (\bar{g}_i^T - \mathbf{t}_{i,n_i}^T A_i T_i^{-1}) T_i \mathbf{x}_i(t) \\ & - \bar{\beta}_i^{-1} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i(t)} \ell_{ij}(t) (\mathbf{t}_{i,n_i}^T \mathbf{x}_i(t) - y_j(t - \tau_{ij}(t))) \end{aligned} \quad (8)$$

各パラメータ  $\bar{\beta}_i, \bar{g}_i^T, \mathbf{t}_{i,n_i}^T, T_i$  については省略する。制御入力 (8) によって、ネットワークシステムは以下のように振る舞う。

定理 3 グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  が仮定 2 を満たし、全てのエージェントの動特性が仮定 3 を満たすとする。このとき、グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  から得られる仮想グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$  が全域木を含むならば、ネットワークシステム (5), (8) の出力値  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n_a$ ) は合意形成する。

## 6. 数値シミュレーション

まず、1 次系についてのシミュレーション結果を示す。エージェント数  $n = 10$ 、最大の通信遅れ  $\tau_{\max} = 30\text{s}$  とした。通信遅れ  $\tau_{ij}$ 、重み  $a_{ij}$  は 0.1s, 1s 毎にランダムに変動させた。  $t = 30\text{s}$  から通信を始めた。通信経路  $\mathcal{E}$  は 10s 毎に切り替えさせた。以下の 2 つの場合について、シミュレーションを行った。

case1: 仮想グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$  が全域木を持たない場合。

case2: 仮想グラフ  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$  が全域木を持つ場合。

case1, case2 はそれぞれ定理 1, 定理 2 の条件を満たしている。case1, case2 のシミュレーション結果は図 2, 3 のようになった。

つぎに、高次系についてのシミュレーション結果を示す。エージェント数  $n_a = 4$ 、最大の通信遅れ  $\tau_{\max} = 50\text{s}$  とした。通信遅れ  $\tau_{ij}$  は 0.1s 毎にランダムに変動させた。  $t = 50\text{s}$  から通信を始めた。通信経路  $\mathcal{E}$  は 5s 毎に切り替えさせた。そのシミュレーション結果は図 4 のようになった。

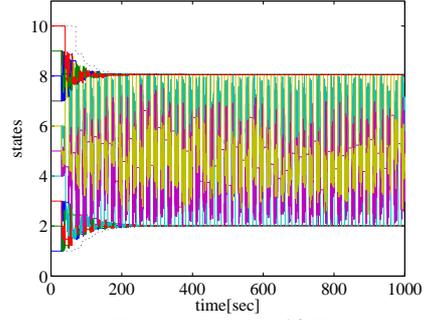


図 2: Case 1 の結果

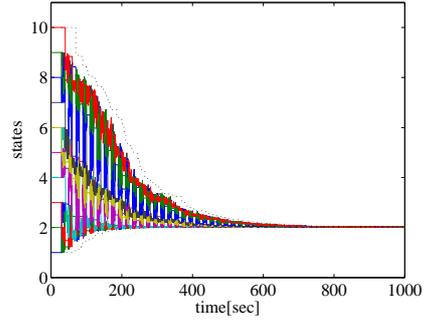


図 3: Case 2 の結果

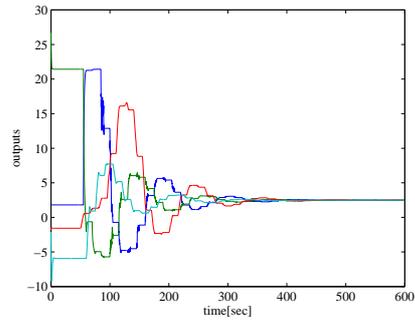


図 4: 出力の変化

## 7. 結論

合意形成問題におけるネットワークシステムの通信遅れと経路切り替えに対するロバスト安定性の解析を行った。その結果、自身の状態量のフィードバックループに時間遅れが生じなければ、ネットワークシステムの状態量はある有界の範囲で保たれることがわかった。さらに、もとのグラフから作られるあるグラフが全域木を含むならば、合意が形成されることもわかった。また、高次の SISO システムに対して、出力を一致させることができた。

## 参考文献

- [1] Wenjie Dong and Jay A. Farrell, Cooperative Control of Multiple Nonholonomic Mobile Agents, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.53, iss.6, (2008), 1434-1448
- [2] Reza Olfati-Saber and Jeff S. Shamma, Consensus Filter for Sensor Networks and Distributed Sensor Fusion, IEEE Conference on Decision and Control, iss.12-15, (2005), 6698-6703
- [3] Pierre-Alexandre Bliman and Giancarlo Ferrari-Trecate, Average Consensus Problems in Networks of Agents with Delayed Communications, Automatica, vol.44, iss.8, (2008), 1985-1995
- [4] Coordination Variables and Consensus Building in Multiple Vehicle Systems, Cooperative Control, vol.309, (2004), 171-188