

# システムの受動性に基づくPIDコントローラの調整に関する研究

## Studies on Passivity-Based Tuning of PID controller

80223583 丸山洋一 (Yoichi Maruyama)

Supervisor 志水清孝 (Kiyotaka Shimizu)

### 1. 概要

非線形システムの制御をするにあたって非線形の微分方程式の解を解析的に求められることは極めて稀である。計算機を使うことによって数値的に求めることはできるが、得られる解は初期状態に依存するものであり、すべての初期状態について計算することはできない。しかも、初期状態のわずかな違いで解の振る舞いが大きく異なることがあるので、求められた有限個の数値解から微分方程式の性質を判断することは危険である。また微分方程式の安定性を解析的に調べるために Lyapunov の安定判別法がよく使われるが、これは解の平衡状態からの距離の時間的変化を、状態のスカラー値関数を用いて評価するもので、解そのものを求めることなく、しかも解析的に安定性を調べることができる。ただし、Lyapunov の安定定理は内部安定性に関する定理なので入力恒等的に零、つまり自由応答の場合において解軌道や平衡点の安定性を解析する定理である。

本論文ではこれに代わって受動性理論を用いて安定性の解析を行った。受動的なシステムとは供給されたエネルギーを常に消費し、外部にエネルギーを戻さないシステムのことである。受動性理論から導出される蓄積関数は Lyapunov 関数としての役割をはたし、多くの機械システムの安定解析に役立っている。システムの受動性はエネルギーの観点から入出力安定性の解析に用いることができる。それだけではなく、受動性理論にしたがってフィードバックでの制御系の設計をする場合、制御対象の出力と制御のためにフィードバックする出力はまったく違うものとして扱われるため、制御対象の出力方程式を設計者が技巧的に設計できることが設計の柔軟性を高めている。本論文は受動性と安定性の関係、受動性に基づいた制御系設計に関するものであり、閉ループ系の受動性を満足する条件から PID パラメータ調整を行った。

### 2. 受動性理論<sup>3)</sup>

本研究では、以下の微分方程式で記述されるシステムを扱う。

$$\begin{cases} \dot{d} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (1)$$

このシステムに対し、供給率は  $u$  と  $y$  の関数として  $s(u, y)$  と定義される。また内部のエネルギーは蓄積関数と呼ばれる準正定スカラー値関数  $S(x)$  で定義される。供給率  $s(u, y) = u^T y$  に対して、消散不等式と呼ばれる次式を満足するときシステムは受動的であるという。

$$\begin{cases} S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^T s(u(t), y(t)) dt \\ \text{or} \\ \dot{S}(x) \leq s(u(t), y(t)) \end{cases} \quad (2)$$

このことから、システムが受動的であるとは供給されたエネルギーを常に消費し、外部にエネルギーを戻さないことを意味する。

また、システムが受動的で  $C^1$  級の蓄積関数  $S$  を持っており、システムの出力方程式  $h(x, u)$  がすべての  $x$  に対して、 $u$  に関して  $C^1$  級であるとき、以下がなりたつことにより受動的なシステムが安定であるといえる。

(i)  $S$  が正定ならば、 $x = 0$  は  $u = 0$  のもとで安定である。

(ii) システムが零状態可検出ならば、 $x = 0$  は  $u = 0$  のもとで安定である。

(iii)  $y = h(x)$  (直積項はない) とする。このとき、 $u = -Ky$  が  $x = 0$  を漸近安定にするためには、 $H$  が零状態可検出であることが必要かつ十分である。ただし  $K \triangleq \text{diag}\{\kappa_1, \dots, \kappa_r\}, \kappa_i > 0$  とする。

なお、サーボ問題に対してもコントローラの定常入力によって平衡点  $s$  を安定な原点とすることができる。本研究では、この性質を制御系が安定性を満足する条件として PID パラメータ調整を行った。

### 3. 受動性理論に基づく安定化制御<sup>3)</sup>

受動的でない制御対象に対し、過剰な受動性を持った要素を接続することにより受動性の不足を補償し、制御系の入出力安定化を図るという概念のもとに制御系の設計を行った。要素の接続の仕方にはフィードバック接続とフィードフォワード接続があるが、本研究は PID 制御に焦点をおいているので専らフィードバック接続による補償を行った。(Fig.1)

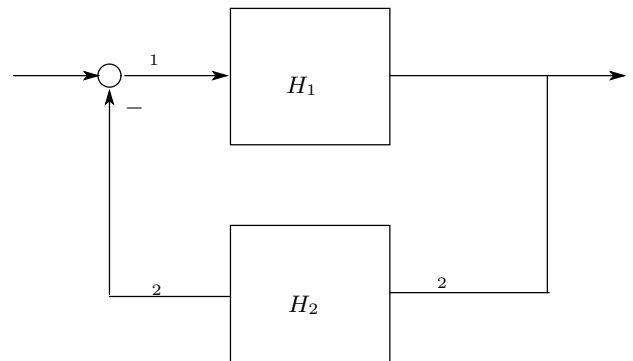


Fig.1: フィードバック接続

### 4. 受動性に基づくPID制御<sup>1) 2)</sup>

PID コントローラ

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = \ddot{e} \\ u = K_I z_1 + K_P z_2 + K_D z_3 \end{cases} \quad (3)$$

の蓄積関数は、I 動作、P 動作、D 動作のそれぞれがもつ蓄積エネルギー  $S_I(z) = \frac{1}{2} K_I z_1^T z_1$ ,  $S_P(z) = 0$ ,  $S_D(z) = \frac{1}{2} K_D z_2^T z_2$  の総和で表され、供給率  $s = e^T u$  に対して微分形式の蓄積関数は

$$\dot{S}_{PID}(z) = e^T u - z_2^T K_P z_2 \quad (4)$$

となることから PID コントローラは受動的となり、第 2 項によって受動性の過剰分をつくりし、閉ループ系の受動性を補足できる (Fig.2)。

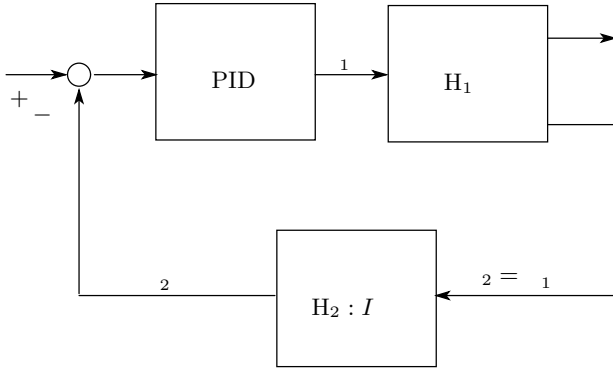


Fig.2: PID 制御

PID コントローラは制御対象と直列に接続されるので、その合成されたシステムが Fig.1 における  $H_1$  となり、制御対象の出力方程式  $h(x, u)$  のゲインが  $H_2$  としてフィードバック接続されると考えられる。ゆえに、制御の目的となる出力とフィードバックする出力はまったく無関係のものになることも十分に考えられ、これを技巧的に利用することもできる。制御対象  $H_1$  が供給率  $s = u_1^T y + y^T Q y$  ( $Q$  は準正定対角行列) に関して消散的であるとすると、その第 2 項は受動性の不足分となる。このとき PID 制御の結果として閉ループ系の微分形式の蓄積関数は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{S}(x_1(t), z(t)) &= \dot{S}_{PID}(z(t)) + \dot{S}_{H_1}(x(t)) \\ &= r^T y(t) \\ &\quad - (y_1 - Qy)^T y - (r - y_1)^T K_P (r - y_1) \end{aligned} \quad (5)$$

これより、 $(y_1 - Qy)^T y \geq 0$  となる  $y_1$  を選び、 $K_P$  のゲインを十分に大きくとれば閉ループ系は受動的となる。

#### 5. 手動リセット量によって受動性を補った PD 制御<sup>1) 2)</sup>

一般に制御対象のもつ重力や弾性によるポテンシャル項は状態変数  $x$  の関数で簡単に表され、これを定常状態において積分動作によってキャンセルするよりも手動リセット量というあらかじめ決められた形でキャンセルする方が容易であり、また手動リセット量によって制御系の蓄積関数がより簡単な形に書き換えられるために解析的なパラメータ調整が容易になる。このコントローラの入出力関係は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = & w_2 \\ \dot{w}_2 = & \ddot{e} \\ u = & K_P w_1 + K_D w_2 + u_0(x) \end{cases} \quad (6)$$

これを利用した制御においても PID 制御と同様に制御対象  $H_1$  が供給率  $s = u_1^T y + y^T Q y$  ( $Q$  は準正定対角行列) に関して消散的であるとすると、閉ループ系の微分形式の蓄積関数は次式ようになる。

$$\dot{S}(x, w) = r^T y - (y_1 - Qy)^T y - w_1^T K_P w_1 - w_1^T u_0(x) \quad (7)$$

これより、 $y_1$ 、 $K_P$  を適切にとれば閉ループ系は受動的になる。

#### 6. シミュレーション

Single-Link manipulator

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -\frac{D}{I} x_2 + \frac{mgl}{I} \sin x_1 + \frac{1}{I} u \\ y = & x_1 \end{cases} \quad (8)$$

に対し、PID 制御を行い、4 節の方法を用いてパラメータ調整および出力方程式を  $y_1 = kx_1$  としたときの  $k$  の決定を行った。なお、式中の各パラメータは  $D = 0.00198$ 、 $m = 1.0$ 、 $g = 9.81$ 、 $l = 0.50$ 、 $I = \frac{4}{3}ml^2$  とした。また目標値を  $x_{1r} = r$  としたときの定常入力値は  $u_s = -mgl \sin r$  となる。制御対象の蓄積関数を運動エネルギーとポテンシャルの和として  $S_{slm}(x) = \frac{1}{2}Ix_2^2 + mgl(\cos x_1 + 1)$  としたところ、蓄積関数の時間微分は

$$\dot{S}_{slm} \leq ux_1 + \frac{1}{2D}u^2 + Dx_1^2 \quad (9)$$

となり、受動的ではなかった。PID コントローラと制御対象を合わせた制御系全体の蓄積関数は微分形式で

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{S}_{slm} + \dot{S}_{PID} + ey - eu - uy \\ &= rx_1 - (k - D)x_1^2 - k_P z_2^2 \end{aligned} \quad (10)$$

となったので、 $k \geq D$  とし、 $k_P$  のゲインを十分に大きくすれば閉ループ系は受動的となる。この結果を参考に、 $y_1 = 2y$  とし、 $k$  と定常出力値  $u_s$  から  $u_s = k_P e_s$ 、 $e_s = r - y_{1s}$  を解くことで  $k_P$  が計算でき、目標値  $x_{1r} = 1$  のときパラメータ  $[k_I, k_P, k_D] = [0.00, 4.147415, 1.00]$  を得た。初期値  $(0) = [0, 0]^T$ 、シミュレーションを行った。結果を Fig.3 に載せた。

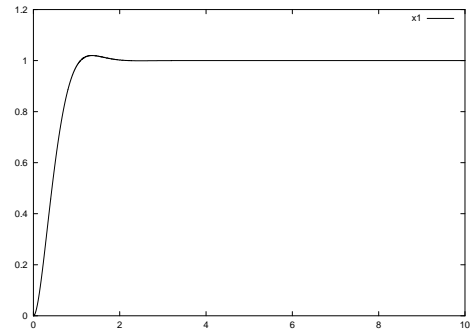


Fig.3: シミュレーション

#### 7. 結論

本研究では、受動性理論に基づいて制御対象の出力方程式の設定と PID パラメータ調整を行った。その際、出力方程式を単純に所望の状態変数、ほとんどの場合  $y = x_1$  とした場合とそうでない場合においては前者では制御成績は良好で I 動作は不要であるが  $k_P$  は目標値  $r$  に依存してしまった。また後者では手動リセット量つき PD 制御の方が比較的設計しやすかった。解析的にパラメータ調整をすることができたが、計算は容易でなく、高次の制御対象に対して適用することが現実的でないことは否めない。

#### 8. 参考文献 (抜粋)

- 1) 有本 卓, 機械システムの知能化 : 受動性, 人口ポテンシャル, 及び定置制御, 日本ロボット学会誌, Vol.12, No.2, pp.240 ~ 244, 1994
- 2) Rogelio Lozano, Bernard Brogliato, Olav Egeland and Bernhard Maschke, Dissipative Systems Analysis and Control, Springer, 2000
- 3) R.Sepulchre, M.Jankovic and P.Kokotovic, Constructive Nonlinear Control, Springer, 1997