

## リアプノフの安定定理による安定化制御器とその非線形システムへの応用

## Stabilizing Controller by Lyapunov's Stability Theorem

## and its Application to Nonlinear Systems

80223423 星野 弘行 (Hiroyuki Hoshino) Supervisor 志水 清孝 (Kiyotaka Shimizu)

## 1. はじめに

本論文では、リアプノフの安定定理より安定なリアプノフ関数を設定し、min-max 問題を適用することで安定化制御器を設計し、非線形システムに応用した。

非線形システムの安定論として一般にリアプノフの安定定理が知られている。リアプノフ関数の候補として正定対称行列  $Q_1$  を用いた状態の二次形式を考える。このとき安定なリアプノフ関数として  $Q_1$  に対する必要最低条件を考える。この条件を満たすような  $Q_1$ 、もしくは条件を満たすように  $Q_1 = W^T W$  と  $W$  の変数とし、リアプノフ関数を構成し、min-max 問題を考えることで安定化制御器を設計した。安定化制御として状態フィードバック制御と PID 制御を考え、非線形システムに応用し、実用上有効であることを示す。

## 2. PID 制御による安定化制御

次のアフィン非線形システムを考える。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, y = cx \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

ただし  $x \in R^n, u \in R, y \in R$  である。(1) に対して  $\dot{z} = y$  として PID 制御  $u = k_I z + k_P y + k_D \dot{y}$  を行うとき、二次形式リアプノフ関数候補として次の正定値関数を考える。

$$V(x, z) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで  $Q_1 \in R^{n+1 \times n+1}$ 。(2) の時間微分  $\dot{V}(x, z)$  は

$$\dot{V}(x, z) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} f(x) + g(x)u \\ cx \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで  $u = -(1 + k_D c g(x))^{-1} \{k_I z + k_P c x + k_D c f(x)\}$  (3) が負定値のときリアプノフの安定定理より、漸近安定といえる。

## 3. 漸近安定条件と min-max 問題

リアプノフ関数の時間微分  $\dot{V}$  の負定性を示すために次式を考える。

$$\dot{V}(x, z) \leq -\rho(x, z) \quad (4)$$

右辺の  $-\rho(x, z)$  は負定値関数である。(4) が成立するとき、リアプノフの安定定理より、システムは漸近安定である。(4) の右辺を左辺に移項し、左辺を関数  $F$  とおくと、

$$F(x, z; K, (W)) = \dot{V}(x, z) + \rho(x, z) \leq 0 \quad (5)$$

$x, z$  の平衡状態 (目標値) の近傍領域を漸近安定領域とし、 $\Omega_x, (\Omega_z)$  する。この漸近安定領域で (5) を次の min-max 問題と考える。

$$\min_{K, (W)} \max_{(x, z) \in \Omega_x \times (\Omega_z)} F(x, z; K, (W)) \leq 0, \quad \forall \{x, z\} \in \Omega_x, (\Omega_z) \quad (6)$$

この min-max 問題では、 $F$  の  $x, z$  に関する最大値  $\max F$  を最小化し、それが 0 以下になれば、 $\Omega$  内すべての点で  $F$  は 0 以下となり、(5) を満たす  $K \triangleq \{k\}$ 、もしくは  $K \triangleq \{k_P, k_I, k_D\}$ 、そして  $Q_1(W)$  が求められる。ここで最大値関数は漸近安定領域内で  $\{x, z\}$  を離散点とし、最小化問題として安定化パラメータ  $K$  (及び  $W$ ) に関する最急降下法を用

いた。また  $\rho(x, z) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q_2 \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  とした。

## 4. 正定対称行列の条件 (PID 制御)

(3) より、 $\dot{V}(x, z)$  は、

$$\dot{V}(x, z) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} f(x) \\ cx \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} g(x)(1 + k_D c g(x))^{-1} \{k_I z + k_P c x + k_D c f(x)\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表すことができる。ここで  $Q_1 = [q_1 \cdots q_{n+1}]$  とし、入力  $u$  のある項がかかる  $Q_1$  の成分を  $q_u$  とする。このとき (7) の第二項を 0 にする  $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T q_u = 0$  を満たす  $\begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix}$  が存在する。安定になるためには  $\dot{V}$  が負定なので、(7) より、

$$\dot{V}(x^*, z^*) = \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} f(x^*) \\ cx^* \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \{x^*, z^*\} \neq 0 \in \Omega_x \times \Omega_z \quad (8)$$

が成立することが  $Q_1$  に最低限必要である。(必要最低条件)

## 5. シミュレーション

single-link manipulator として長さ  $2l$ 、質量  $m$  のリンクの一端にトルク  $u(t)$  が制御入力として加わっているとす。鉛直上向きを  $\theta = 0$  とし、 $x = (\theta, \dot{\theta})^T$  とおくと次の状態方程式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 + g_2 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{D}{T})x_2 + (\frac{mlg}{T})\sin x_1 + (\frac{1}{T})u \\ y = cx = [1 \ 0] x \end{bmatrix} \quad (9) \end{aligned}$$

このとき  $D$  はリンクの軸受けの粘性摩擦係数  $D = 0.00198$ ,  $I$  はリンクの慣性モーメント  $I = \frac{1}{3}$ ,  $m = 1$ ,  $l = 0.5$ ,  $g = 9.81$  とする。single-link manipulator に対して PID 制御を行う。ここで相対次数が 2 以上なので  $u = -(k_I z + k_P x_1 + k_D x_2)$  (1)  $Q_1$  を定数 (対角行列) とした場合  $Q_1 = \text{diag}(1, 1, 1)$  のとき、(3) は

$$\dot{V}(x, z; k_I, k_P, k_D) = x_1 f_1 + x_2 \{f_2 + g_2 u\} + z x_1 \quad (10)$$

(8) より、 $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T q_u = x_2 = 0$  より  $\begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}^T$  であ

り、このとき (10) は、次式で表され、 $\dot{V}$  が負定でないため、min-max 問題を適用しても安定化パラメータは得られない。

$$\dot{V}(x^*, z^*; k_I, k_P, k_D) = z x_1 \quad (11)$$

(2)  $Q_1$  を定数とした場合

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ としたとき、(3) は}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, z; k_I, k_P, k_D) &= (4x_1 + x_2 + z)f_1 \\ &+ (x_1 + 2x_2 + z)\{f_2 + g_2 u\} + (x_1 + x_2 + 2z)x_1 \quad (12) \end{aligned}$$

$$(8) \text{ より } \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix}^T \mathbf{q}_u = x_1 + 2x_2 + z = 0 \text{ より, } \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ z^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}^T$$

であり, このとき (12) は, 次式となり

$$\dot{V}(\mathbf{x}^*, z^*; k_I, k_P, k_D) = -(x_1^2 + x_2^2) \quad (13)$$

(8) の必要最低条件を満たす.  $Q_2 = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1)$  として min-max 問題を適用するため  $\nabla_K F(\mathbf{x}, z; k_I, k_P, k_D)$  の勾配を求める. 以上の準備のもと, 初期推定値を  $k_I^0 = 1.0, k_P^0 = 1.0, k_D^0 = 1.0$  として min-max 問題を適用し, 安定化パラメータを探索しシミュレーションを行った. 更新後  $F = 0$  となり  $\dot{V}$  の負定性が示され, 安定化パラメータ  $k_I = 0.842500, k_P = 5.377150, k_D = 2.222200$  を得た.

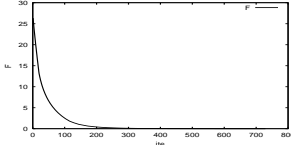


Fig.1:  $F$  の更新の様子

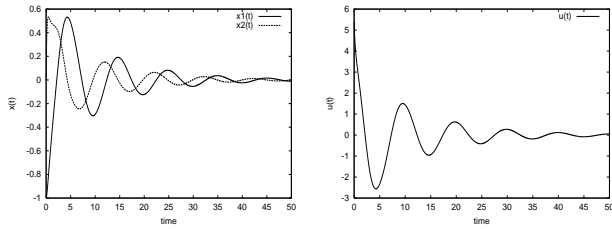


Fig.2: single-link manipulator の PID 制御

初期値  $\mathbf{x}(0) = (-1, 0)^T, u(0) = 0$

(3)  $Q_1 = W^T W$  とした場合

ヘリコプタモデルとして方位角を固定し, 仰角の制御系のみを考えることにする. 仰角  $\Psi$  は鉛直下向きを 0 とする. 機体の重心は支点前方にある.  $I$  は機体の上下方向回転に関する慣性モーメント,  $T_1$  は仰角駆動によるトルク,  $T_f$  は摩擦によるトルク (粘性力),  $T_m$  は重力によるトルク, 仰角は  $\Psi$  である.  $T_1, T_f, T_m$  は次のように与えられる.

$$T_1 = au_d^3 + bu_d, T_m = mglsin\Psi = T_g sin\Psi \quad (14)$$

$$T_f = B\dot{\Psi}, I\ddot{\Psi} = T_1 - T_f - T_m \quad (15)$$

$T_g$  は重力によるモーメント,  $u_m$  はモータへの入力電圧,  $u_d$  はモータへのアーマチュア電圧,  $B$  は粘性摩擦係数である.  $a, b$  はモータの入力電圧, メインプロペラのトルク曲線を表すパラメータ,  $\theta$  は支点と重心の高さのずれに係る角度であるとする.  $T$  はモータの特性を表す時定数である. 仰角の制御系の数学モデルは次のように与えられる.

$$I\ddot{\Psi} = au_d^3 + bu_d - B\dot{\Psi} - T_g sin(\Psi + \theta) \quad (16)$$

$$u_m = T^2 \ddot{u}_d + 2T \dot{u}_d + u_d \quad (17)$$

$\bar{\Psi}$  を保持したい仰角  $\bar{\Psi}$  とし, そのときのアーマチュア電圧は  $\bar{u}_d$  とする.  $x_1 = \Psi - \bar{\Psi}, x_2 = u_d - \bar{u}_d, x_3 = \dot{\Psi}, x_4 = \dot{u}_d, u = u_m - \bar{u}_d$  観測出力を  $y = x_1$  とし, ヘリコプタモデルの運動方程式を状態空間表現すると, 次のようになる.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 + g_4 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{a}{I}(x_2 + \bar{u}_d)^3 + \frac{b}{I}(x_2 + \bar{u}_d) - \frac{B}{I}x_3 + \frac{T_g}{I} sin(x_1 + \bar{\Psi} + \theta) \\ -\frac{1}{T^2}(x_2 + \bar{u}_d) - \frac{2}{T}x_4 + \frac{1}{T^2}(u + \bar{u}_d) \end{bmatrix}$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \quad (18)$$

$\bar{\Psi} = \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\bar{u}_d = 0.7241$  となり,  $I = 0.00308, B = 0.0358, T_g = 0.0782, a = 0.0650, b = 0.0722, T = 0.2, \theta = 0.21$  とする. ヘリコプタモデルに対して PID 制御を行う. ここで相対次数が 2 以上なので  $u = -(k_I z + k_P x_1 + k_D x_3)$ . このとき, (8) を満たすような  $Q_1$  を解析的に求めるのは困難なため,  $Q_1 = W^T W$  とし,  $W = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{51} & \cdots & w_{55} \end{bmatrix}$  による変数とする.  $Q_1 = [q_1 \ \cdots \ q_5]$  とし

たとき, 必要最低条件より  $q_u = q_4$  であり,  $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{bmatrix}^T \mathbf{q}_4 = 0$

となる  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ z^* \end{bmatrix}^T$  を離散点上に存在するよう, ここでは  $q_4 =$

$[0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 1 \ 0.25]^T$  とし,  $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & w_{15} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & 0 & w_{25} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & 0 & w_{35} \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ w_{51} & w_{52} & w_{53} & 0 & w_{55} \end{bmatrix}$  と

する.  $Q_2 = \text{diag}(0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01)$  として, min-max 問題を適用するため,  $\nabla_W F(\mathbf{x}, z; k_I, k_P, k_D, W)$ , 及び  $\nabla_W F(\mathbf{x}, z; k_I, k_P, k_D, W)$  を求める. 以上の準備のもと, 初期推定値を  $k_I^0 = 1.0, k_P^0 = 1.0, k_D^0 = 1.0$  として min-max 問題を適用し, 安定化パラメータを探索しシミュレーションを行った. 更新後  $F = 0$  となり  $\dot{V}$  の負定性が示され, 安定化パラメータ  $k_I = 0.184750, k_P = 0.180250, k_D = 0.097250$  を得た. また初めに与えた  $W^0$  と更新後の  $W$  は

$$W^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.212057 & 0.425787 & -0.089478 & 0.000000 & -0.093422 \\ 0.369153 & 2.383366 & -0.048050 & 0.000000 & 0.168244 \\ -0.101427 & -0.682114 & 0.016599 & 0.000000 & -0.016759 \\ 0.250000 & 0.250000 & 0.250000 & 1.000000 & 0.250000 \\ 0.100124 & 0.259348 & 0.047653 & 0.000000 & 0.547942 \end{bmatrix}$$

$$\text{これより } Q_1 = \begin{bmatrix} 0.264054 & 1.127769 & 0.028875 & 0.250000 & 0.161359 \\ 1.127769 & 6.456770 & -0.089083 & 0.250000 & 0.577247 \\ 0.028875 & -0.089083 & 0.075362 & 0.250000 & 0.088608 \\ 0.250000 & 0.250000 & 0.250000 & 1.000000 & 0.250000 \\ 0.161359 & 0.577247 & 0.088608 & 0.250000 & 0.400055 \end{bmatrix}$$

となり,  $Q_1$  は正定で, 必要最低条件を満たしている.

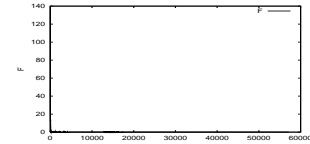


Fig.3:  $F$  の更新の様子

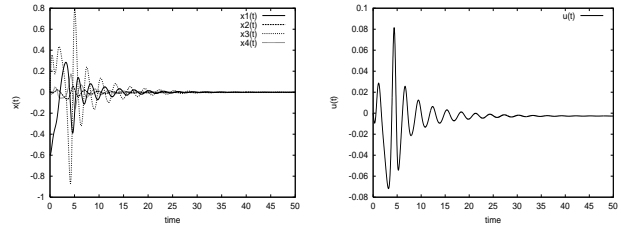


Fig.4: ヘリコプタモデルの PID 制御

初期値  $\mathbf{x}(0) = (-0.6, 0, 0, 0)^T, u(0) = 0$

## 6. 結論

本論文では, リアプノフの安定定理より求まる正定対称行列  $Q_1$  の必要最低条件を満足するように, リアプノフ関数を構成し, それに対し min-max 問題に適用することで, リアプノフの漸近安定条件を満たす状態フィードバック制御及び PID 制御の安定化パラメータを得ることができた. min-max 問題により安定化パラメータを求める上で, この正定対称行列  $Q_1$  の構成法は実用上有効であるといえる.

## 7. 参考文献

- [1] 志水, 伊藤, リアプノフ直接法による非線形システムのニューラル安定化制御, 計測自動制御学会論文集, Vol.35, No.4, 489/495, 1999
- [2] 島, 志水, リアプノフ直接法に基づく PID 安定化制御器による非線形制御, SICE 制御理論シンポジウム予稿集, 1999, May