

## ニューラルネットとリアプノフ直接法を応用した安定化コントローラの設計

Design of Stabilizing Controller Applying Neural Networks and  
Lyapunov's Direct Method

80222507 佐藤 亮 (Ryo Sato) Supervisor 志水 清孝 (Kiyotaka Shimizu)

## 1. はじめに

リアプノフ直接法を応用した安定化コントローラの設計について考える．本論文では以下の3つの手法を提案する．1つめは直接勾配降下制御における比例係数行列パラメータ  $\mathcal{L}$  の調整法について，もう1つは制御成績を考慮した  $\mathcal{L}$  の調整法について，そして3つめは制御成績を考慮した中心多様体写像の近似による安定化制御器設計法についてである．本論文では，安定化することだけを目的とした従来の保守的な制御設計としてだけでなく，それに加えて制御成績も改善できるような設計であることが大きな特長である．

## 2. リアプノフ直接法に基づく直接勾配降下制御の設計

一般非線形システム

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (1)$$

を考える．ただし， $x \in R^n$ ， $u \in R^r$  とする．(1) に対し，直接勾配降下制御を用いて拡大システムは次のように与えられた．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, u) \\ -\mathcal{L}[f_u(x, u)^T Q_1 x + R_1 u] \end{bmatrix} \quad (2)$$

リアプノフ関数  $V(x, u)$  は三層ニューラルネットで近似的に実現する．

$$z = W_1 \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \theta \quad (3a)$$

$$y(x, u) = W_2 \sigma(z) - W_2 \sigma(\theta) \quad (3b)$$

$$V_N(x, u) = y(x, u)^T y(x, u) \quad (3c)$$

平衡点  $(0, 0)$  の近傍領域  $\Omega$  において拡大システム (2) が漸近安定となるためには

$$F(x, u; \mathcal{L}, W_1, W_2, \theta) = \dot{V}_N(x, u) + \rho(x, u) \leq 0 \quad (4)$$

であれば十分である．ただし， $\rho(x, u) = x^T Q_2 x + u^T R_2 u$  とする．ここで，最大値関数  $J(\mathcal{L}, W_1, W_2, \theta)$  を

$$J(\mathcal{L}, W_1, W_2, \theta) \triangleq \max_{(x, u) \in \Omega} F(x, u; \mathcal{L}, W_1, W_2, \theta) \quad (5)$$

と定義すると，問題は  $J(\mathcal{L}, W_1, W_2, \theta) = 0$  とするような  $\mathcal{L}, W_1, W_2, \theta$  を見つけることである．

この問題を解くために領域  $\Omega$  を離散化する．そして， $x^*, u^*$  と固定して勾配行列を求める手法を用い，最急降下法により  $\mathcal{L}, W_1, W_2, \theta$  を計算する．

3. 制御成績を考慮したリアプノフ直接法に基づく  
直接勾配降下制御の設計

2. で述べた手法はリアプノフ安定性を満たす  $\mathcal{L}, W_1, W_2, \theta$  を見つけることが目的の手法であるため，得られた  $\mathcal{L}$  により必ずしも良好な制御成績が得られるとは限らない．

制御成績を考えるためには (4) を制約条件とした上で，新たな評価関数を設定してシステム (2) のダイナミクスを考慮

する必要がある．そこで，DGDC の比例係数行列  $\mathcal{L} \in R^{r \times r}$  を決定するための関数候補として

$$S(x, u) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T Q_3 \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (6)$$

を考える．ただし，重み係数行列  $Q_3 \in R^{(n+r) \times (n+r)}$  は正定行列とする．(6) を時間微分すると，次式のように表される．

$$\frac{dS(x, u)}{dt} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T Q_3 \begin{bmatrix} f(x, u) \\ -\mathcal{L}[f_u(x, u)^T Q_1 x + R_1 u] \end{bmatrix} \quad (7)$$

(7) は  $(x, u)$  の収束速度に関する評価関数としてみなすことができる．ただし， $\frac{dS(x, u)}{dt}$  を減少させるときには数値的なオーダーについて吟味する必要がある．評価関数を (7) とした場合，負の値に大きく減りすぎてしまい，制約条件によるペナルティが課されにくくなることも考えられる．この問題を避けるため，(7) の指数関数 (exponential function) を与えることでスケーリングを考慮する．

以上より，制御成績を考慮する評価関数  $E$  を次式のように与える．

$$E[\mathcal{L}, W_1, W_2, \theta] = \sum_{p=1}^P \exp\left(\begin{bmatrix} x^p \\ u^p \end{bmatrix}^T Q_3 \begin{bmatrix} f(x^p, u^p) \\ -\mathcal{L}[f_u(x^p, u^p)^T Q_1 x^p + R_1 u^p] \end{bmatrix}\right) \quad (8)$$

ニューラルネットによる学習には最急降下法を用い，リアプノフ安定条件 (4) を制約条件として評価関数の最適化問題を解く．

## 4. ニューラルネットによる中心多様体の安定化

一般非線形システム

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (9)$$

を考える．ただし，ここでは (9) の線形近似システム  $\dot{x} = Ax + Bu$  が虚軸上に固有値をもつ場合を考える．このとき，対角化行列  $T$  によって  $A, B$  は

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A^{s'} & O \\ O & A^{c'} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} B^{s'} \\ O \end{bmatrix} \quad (10)$$

とすることができる．ただし， $A^{c'}$  の固有値はすべて虚軸上にあり，かつ  $\{A, B\}$  の不可制御モードであるとする．また， $A^{s'}$  に含まれる不安定な固有値はすべて  $\{A, B\}$  の可制御モードであるとする．行列  $T$  を用いて， $x = T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$  と座標変換すると，(9) は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = T^{-1} f \left( T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, u \right) \quad (11)$$

行列  $(A^{s'} + B^{s'} K)$  が漸近安定となるように  $u = Ky + \bar{u}$  を選び，(11) に代入すると，

$$\dot{y} = f^s(y, z, \bar{u}) \quad (12a)$$

$$\dot{z} = f^c(y, z, \bar{u}) \quad (12b)$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} \dot{f}^s(y, z) \\ \dot{f}^c(y, z) \end{bmatrix} = T^{-1} f \left( T \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, Ky + \bar{u} \right) \quad (13)$$

である. (12a),(12b) に状態フィードバック制御則  $\bar{u} = \alpha^u(y, z) = c(z)$  を施すと次のように書ける.

$$\dot{y} = f^s(y, z, c(z)) \quad (14a)$$

$$\dot{z} = f^c(y, z, c(z)) \quad (14b)$$

このとき, (14a),(14b) を原点まわりで線形化すると,

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^s & O \\ O & A^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (15)$$

である.

行列  $A^c$  の固有値に対応する (一般化) 固有空間  $E^c$  は,  $E^c = \{(y, z) \in R^n | y = 0\}$  であるが, 中心多様体理論より, 原点において  $E^c$  に接する中心多様体  $S^c(0) = \{(\pi(z), z) | \pi(0) = 0, \frac{\partial \pi}{\partial z}(0) = O\}$  が存在することが保証されている. 中心多様体  $S^c(0)$  上の接ベクトル場を  $E^c$  上に射影したものは

$$\dot{z} = f^c(\pi(z), z, c(z)) \quad (16)$$

として表現され,  $y$  のダイナミクス (14a) は 1 次の項において漸近安定であるので, 中心多様体理論により, (16) が漸近安定であれば, 全体の安定性が保証される. ここで中心多様体の局所的な不変性から,  $(y, z)$  は中心多様体上に留まるため,

$$\dot{y}(t) \Big|_{y=\pi(z)} = \frac{\partial \pi(z)}{\partial z} \dot{z}(t) \quad (17)$$

が成立する. したがって,  $\pi(z), c(z)$  は境界条件  $\pi(0) = 0, \frac{\partial \pi}{\partial z}(0) = O$  のもとで

$$\frac{\partial \pi(z)}{\partial z} f^c(\pi(z), z, c(z)) = f^s(\pi(z), z, c(z)) \quad (18)$$

を満たせばよい.

(18) を満たすような中心多様体上の写像  $\pi(z)$  およびフィードバック則  $c(z)$  をニューラルネットにより近似的に実現する.

$$\zeta_1 = W_1 z + \theta_1 \quad (19)$$

$$\zeta_2 = W_3 z + \theta_2 \quad (20)$$

$$\pi_N = W_2 \sigma(\zeta_1) - W_2 \sigma(\theta_1) - W_2 \nabla \sigma(\theta_1) W_1 z \quad (21)$$

$$c_N = W_4 \sigma(\zeta_2) - W_4 \sigma(\theta_2) - W_4 \nabla \sigma(\theta_2) W_3 z \quad (22)$$

さて, このとき次のようなリアプノフ関数候補を考える.

$$V(z) = \frac{1}{2} (z^T Q_1 z + \pi_N^T Q_2 \pi_N + c_N^T Q_3 c_N) \quad (23)$$

(23) の時間微分が

$$\frac{dV(z)}{dt} \leq 0 \quad (24)$$

を満たせば, システム (14a),(14b) の漸近安定性が保証される.

制御成績を考慮するためにリアプノフ関数  $V(z)$  の微分値 (24) を最小化することを目的とする. 数値的なスケリングを考慮して, (24) の指数関数として評価関数  $E[W_1 \sim W_4, \theta_1, \theta_2]$  を次のように与える.

$$E[W_1 \sim W_4, \theta_1, \theta_2] = \sum_{p=1}^P \exp\left(\frac{dV(z^p)}{dt}\right) \quad (25)$$

ニューラルネットによる学習には最急降下法を用い, 制約条件 (18),(24) のもとで評価関数 (25) の最適化問題を解く.

## 5. 数値例

### 5.1 リアプノフ直接法に基づく直接勾配降下制御の設計

Rayleigh Model に対して, 2. で述べた手法に基づいて得られた直接勾配降下制御のパラメータ値  $\mathcal{L}$  を用いてシミュレーションを行った. 時間応答を Fig.1 に示す.

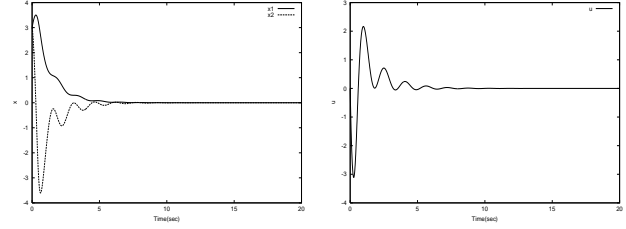


Fig.1: Rayleigh Model に対する直接勾配降下制御  
初期値  $(x(0), u(0)) = (3, 3, 0)$ ,  $\mathcal{L} = 3.378$

### 5.2 制御成績を考慮したリアプノフ直接法に基づく直接勾配降下制御の設計

Rayleigh Model に対して, 3. で述べた手法に基づいて得られた直接勾配降下制御のパラメータ値  $\mathcal{L}$  を用いてシミュレーションを行った. 時間応答を Fig.2 に示す.

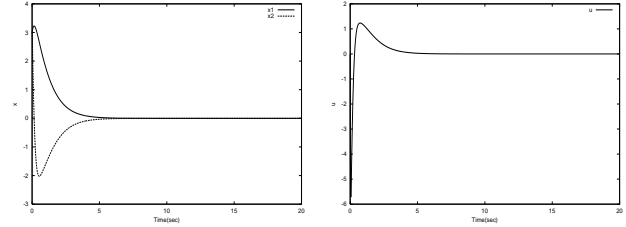


Fig.2: Rayleigh Model に対する直接勾配降下制御  
初期値  $(x(0), u(0)) = (3, 3, 0)$ ,  $\mathcal{L} = 50.493$

### 5.3 ニューラルネットによる中心多様体の安定化

次のような非線形アフィシシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_3 + x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

に対し, 4. で述べた手法に基づいて得られた制御則  $\bar{u} = c_N(z)$  を用いてシミュレーションを行った. 時間応答を Fig.3 に示す.

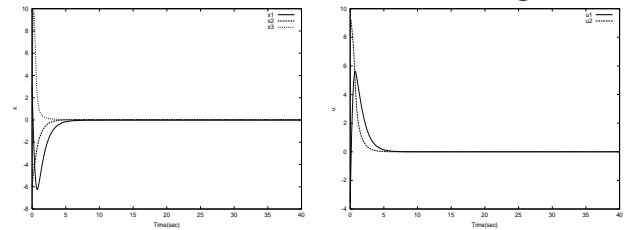


Fig.3: システム (26) に対するフィードバック制御  
初期値  $x(0) = (3, -6, 3)$

## 6. 結論・課題

本論文ではリアプノフ直接法に基づく安定化コントローラの設計法について示した. シミュレーション結果より, それぞれ良好な制御成績で漸近安定化できていることが確認され, 提案した手法はきわめて有効であるといえる. ただし, さらに制御成績を向上させる設計にするためには評価関数候補についてよく検討する必要がある. より効果的な評価関数を考えることが今後の課題となる.

## 7. 参考文献

- [1] 志水 清孝, 伊藤 和幸, リアプノフ直接法による非線形システムのニューラル安定化制御器の設計, 計測自動制御学会論文集, Vol.35, No.4, 489/495, 1999
- [2] Dirk Aeyels, Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control, Systems & Control Letters 5, 289-294, 1985