

非ホロノミックシステムの最適フィードバック制御則と そのニューラルネットによる最良近似

Optimal Feedback Control Law for Nonholonomic Systems and its Best Approximation via Neural Networks

80221898 小尾 俊介 (Shunsuke Obi)

Supervisor 志水 清孝 (Kiyotaka Shimizu)

1. 概要

非ホロノミックとは、一般に位置、姿勢角のみで記述されない拘束で表わされるものである。非ホロノミックな拘束をもつ機械系の多くが制御しづらいとされている。本論文では2つの制御方法を提案する。

オートノマスな非線形システムに対して、ある状態の初期値からの最適状態の軌道と最適な制御入力の軌道の関係を、最急降下法を用いた最適制御の計算法により求めておき、最適制御対としてとらえる。そして、その最適制御対によって得られる状態フィードバック制御則を関数としてとらえ、これを3層ニューラルネットを用いて関数近似の形で表現する。

非線形システムの最適レギュレータ問題を解き、最適状態フィードバック制御則を求めるためには、Hamilton-Jacobi方程式を解かなければならない。ところがHamilton-Jacobi方程式を解析的に解くのは非常に難しい。したがって、最適フィードバック制御則を求めるために必要となるHamilton-Jacobi方程式の解を、ニューラルネットを用いることによって近似する。また、リアプノフ直接法に基づき学習アルゴリズムを改善する。

2. 非ホロノミックシステム

ホロノミックな拘束とは、一般化座標を $x \in R^n$ 、時間を t としたときに次のように表わされる拘束をいう。

$$h(x, t) = 0 \quad \in R^m \quad (1)$$

一方、非ホロノミックな拘束とは、拘束が次のような微分方程式

$$g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0 \quad \in R^m \quad (2)$$

で表わされ、これが(1)の形に帰着できない場合のことである。ここで、非ホロノミック拘束を受ける機械の制御を一般に非ホロノミック制御と呼んでいる。そして、制御入力数以上の数の一般化座標を制御したい場合、劣駆動制御となる。非ホロノミック制御において重要な定理を次に述べる。

[Brockettの定理] 非線形アフィン系

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (3)$$

を考える。 $x \in R^n$ 、 $u \in R^r$ であり、 $f(0) = 0$ を満たす。この系が x に対する1階連続微分可能な連続状態フィードバック $u = \alpha(x)$ によって $x = 0$ の周りで局所的に漸近安定化できるための必要条件は、

[1] 線形近似系に実部が正の極があった場合、それは可制御でなくてはならない。

[2]

$$\Gamma(x, u) = f(x) + G(x)u \quad (4)$$

とおいたとき、写像 $\Gamma(x, u)$ は $(x, u) = 0$ の近傍で onto 写像となる。

対称アフィンシステムは Brockett の定理の条件2を満たさないため、連続状態フィードバック制御 $u = \alpha(x)$ によって安定化できないことが知られている。

3. 最適フィードバック制御則のニューラルネットによる近似

次のような非線形システムの最適制御問題を考える。

$$\min_u \int_0^\infty f_0(x(t), u(t)) dt \quad (5a)$$

$$\text{subj. to } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in [0, \infty), x(0) = x_0 \quad (5b)$$

問題(5a)(5b)の最適制御 $u^o(t), t \in [0, \infty)$ と対応する最適軌道 $x^o(t), t \in [0, \infty)$ を適当な勾配法で計算することができる。その結果、最適制御対 $\{x^o(t), u^o(t)\}, t \in [0, \infty)$ というデータ集合をうることができる。ここで問題(5a)(5b)の任意の時刻 $\bar{t} > 0$ における最適軌道上の点 $x^o(\bar{t})$ を初期条件にもつ、次のような最適制御問題を考える。

$$\min_u \int_0^\infty f_0(x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (6a)$$

$$\text{subj. to } \dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau)), \tau \in [0, \infty), x(0) = x^o(\bar{t}) \quad (6b)$$

[定理1] 問題(6a)(6b)の初期条件 $x(0)$ が、問題(5a)(5b)の任意の時刻 $\bar{t} > 0$ における最適軌道上の点 $x^o(\bar{t})$ に等しいとき、問題(5a)(5b)の解の時間区間 $[\bar{t}, \infty)$ 上の部分

$$\{x^o(t) = x^o(t; x_0), u^o(t) = u^o(t; x_0)\}, t \in [\bar{t}, \infty)$$

と問題(6a)(6b)の解

$$\{\bar{x}^o(\tau) = \bar{x}^o(\tau; x^o(\bar{t})), \bar{u}^o(\tau) = \bar{u}^o(\tau; x^o(\bar{t}))\}, \tau \in [0, \infty)$$

は一致する。

任意の最適状態 $x^o(t)$ に対して定理1が成り立つことから、閉ループシステムの最適状態フィードバック制御則は、

$$u^o(t) = u^o(x^o(t)) = F(x^o(t)), t \in [0, \infty) \quad (7)$$

として与えられる。

最適制御対のデータ集合が得られたら、(7)を3層ニューラルネットによって近似する。状態 x^o をニューラルネットへの入力、 u_N を出力として問題を次のよう定式化する。

$$\min_{W_1, W_2, \theta} E(W_1, W_2, \theta) = \sum_{p=1}^P \frac{1}{2} (u^{op} - u_N^p)^T (u^{op} - u_N^p)$$

$$\text{subj. to } z^p = W_1 x^p + \theta \quad (8)$$

$$u_N^p = W_2 \sigma(z^p), p = 1, 2, \dots, P$$

$$\{x^{op}, u^{op}\}, p = 1, 2, \dots, P; \text{ given}$$

最適な結合重みを得るためには誤差逆伝搬法を応用して W_1, W_2, θ の勾配を求め、結合重みを更新すればよい。

4. H-J 方程式のニューラルネットによる近似解

非ホロノミックシステムは非線形系であることから、非線形最適レギュレータを構成することで系を漸近安定とする方法も考えられる。このような制御則を構成するためには、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の解の偏微分値が必要となるが、非ホロノミック拘束をもつシステムでは、評価関数の最小値が滑らかではないことから Hamilton-Jacobi 偏微分方程式が粘性解と呼ばれる微分不可能な点を含むものしか持たない。ここでは、実際に粘性解を求めるのではなく、ニューラルネットを用いて Hamilton-Jacobi 方程式の近似解を求める方法により系を漸近安定化することを考える。

次の非線形最適レギュレータ問題を考える。

$$\min_{\mathbf{u}} V(\mathbf{u}; \mathbf{x}_0, \infty) = \int_0^{\infty} \{q(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}\} dt \quad (9a)$$

$$\text{subj. to } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (9b)$$

問題 (9a)(9b) の最適制御は、状態フィードバック制御則として次で与えられる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}R^{-1}G(\mathbf{x})^T V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})^T \quad (10)$$

ここで $V(\mathbf{x})$ は次の Hamilton-Jacobi 方程式を満たす、評価汎関数 (9a) の最小値である。

$$q(\mathbf{x}) + V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})G(\mathbf{x})R^{-1}G(\mathbf{x})^T V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})^T = 0 \quad (11)$$

3層ニューラルネットを用いて近似する H-J 方程式の近似解を $V^N(\mathbf{x})$ とおく。近似解 $V^N(\mathbf{x})$ が (11) を満たすように学習を行う。ここで誤差 $e(\mathbf{x})$ を次のように定義する。

$$e(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + V_{\mathbf{x}}^N(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4}V_{\mathbf{x}}^N(\mathbf{x})G(\mathbf{x})R^{-1}G(\mathbf{x})^T V_{\mathbf{x}}^N(\mathbf{x})^T \quad (12)$$

リアプノフ関数を以下のように考える。

$$\tilde{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}_N^T R_1 \mathbf{u}_N \quad (13)$$

ただし、 $Q_1 > 0$, $R_1 > 0$ とする。このとき、 $V(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq 0$ がなりたつことから、 V は正定値関数である。さらに、正定値関数として

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q_2 \mathbf{x} + \mathbf{u}_N^T R_2 \mathbf{u}_N \quad (14)$$

を与える。ただし、 $Q_2 > 0$, $R_2 \geq 0$ とする。

このとき、次のような不等式

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(\mathbf{x}) &= \left(2\mathbf{x}^T Q_1 + 2\mathbf{u}_N^T(\mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}))^T R_1 \frac{\partial \mathbf{u}_N(\mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ &\quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_N(\mathbf{x}, V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) \leq -\rho(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (15)$$

を満たすような $V^N(\mathbf{x})$ をニューラルネットで近似的に実現すれば、システムの安定性が考慮される。

よってリアプノフ直接法を応用したニューラルネットの学習は次のような最適化問題を解くことである。

$$\min_{W_1, W_2, \theta} \bar{E}[W_1, W_2, \theta] = \sum_{p=1}^P |e(\mathbf{x}^p)|^2 + r|\max\{0, F(\mathbf{x}^p)\}|^2$$

$$\text{subj. to } \begin{aligned} \mathbf{z}^p &= W_1 \mathbf{x}^p + \theta \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}^p) &= W_2 \sigma(\mathbf{z}^p) - W_2 \sigma(\theta) \\ V^N(\mathbf{x}^p) &= \mathbf{y}(\mathbf{x}^p)^T \mathbf{y}(\mathbf{x}^p) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} e(\mathbf{x}^p) &= q(\mathbf{x}^p) + V_{\mathbf{x}}^N(\mathbf{x}^p)\mathbf{f}(\mathbf{x}^p) \\ &\quad - \frac{1}{4}V_{\mathbf{x}}^N(\mathbf{x}^p)G(\mathbf{x}^p)R^{-1}G(\mathbf{x}^p)^T V_{\mathbf{x}}^N(\mathbf{x}^p)^T \\ p &= 1, 2, \dots, P \end{aligned}$$

$$\text{where } F(\mathbf{x}^p) = \dot{\tilde{V}}(\mathbf{x}^p) + \rho(\mathbf{x}^p)$$

最適な結合重みを得るためには誤差逆伝搬法を応用して W_1, W_2, θ の勾配を求め、結合重みを更新すればよい。本論文ではラグランジュ未定乗数法を用いてこの勾配を求めた。

5. シミュレーション

5.1 シミュレーション (3章の方法)

2輪車両モデルにおいて、ある初期値からの最適制御軌道を求めるための問題を次のように定式化する。

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \int_0^{100} \{x_1^2 + 10x_2^2 + x_3^2 + u_1^2 + u_2^2\} dt \quad (17a)$$

$$\text{subj. to } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_3 & 0 \\ \sin x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (17b)$$

(17a)(17b) を解いて得られた最適制御対より、状態フィードバック制御則を求め、シミュレーションした結果を以下に示す

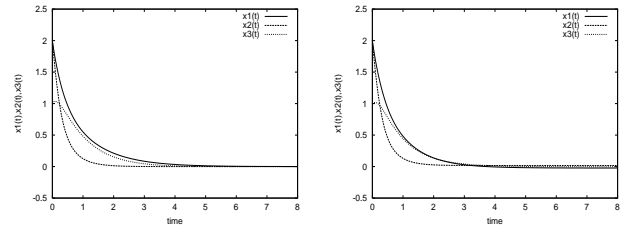


Fig.1: Open-Loop Optimal Control, $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 1)^T$ Fig.2: Closed-Loop Feedback Control by NN, $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 1)^T$

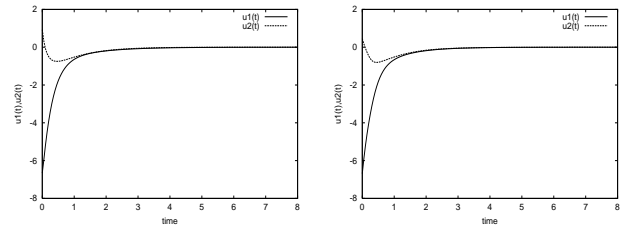


Fig.3: Open-Loop Optimal Control, $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 1)^T$ Fig.4: Closed-Loop Feedback Control by NN, $\mathbf{x}(0) = (2, 2, 1)^T$

5.2 シミュレーション (4章の方法)

劣駆動機械である 1 入力 2 リンクマニピュレータに対し、(16) の最適化問題を解いて得られた、H-J 方程式の近似解を用いた最適状態フィードバック制御則 (10) でシミュレーションした結果を以下に示す。

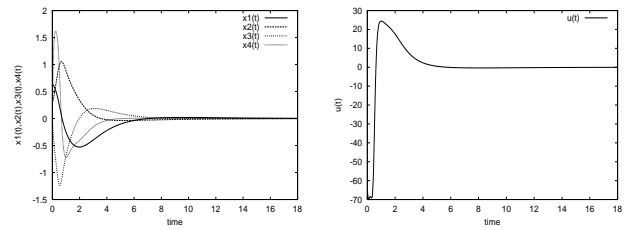


Fig.5: NNによる最適フィードバック制御, $\mathbf{x}(0) = (\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10}, 0, 0)^T$ Fig.6: NNによる最適フィードバック制御入力, $\mathbf{x}(0) = (\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10}, 0, 0)^T$

5. おわりに

本論文では、対称アフィンシステム及びアフィンシステム の非ホロノミックシステムに対し、2つの制御手法を提案した。シミュレーション結果より、本論文の手法の有効性が確認された。

6. 参考文献

- [1] K.Shimizu, M.Ohtani, Y.Ishizuka: Optimal State Feedback Control Law for Nonlinear Systems and Its Best Approximation by a Neural Network, Proc IEEE Int Conf Syst Man Cybern, Vol.4, 1096/1101, 1999
- [2] 志水清孝, 松本周平, 中山慶一: ニューラルネットによる Hamilton-Jacobi 方程式の解法と非線形システムの最適フィードバック制御則, 計測自動制御学会論文集, Vol.38, No.8, 669/676, 2002