

リアプノフ直接法による非線形多変数系のPIDパラメータ調整法

Parameter Tuning of the PID Controller for Nonlinear MIMO System
via Lyapunov's Direct Method

80221437 池田 大 (Masaru Ikeda)

Supervisor 志水 清孝 (Kiyotaka Shimizu)

1. はじめに

PID制御は、通常1入力1出力の線形システムに対して行われる古典的な制御手法であるが、その汎用性から、非線形システムに対しても有効な制御手段として広く用いられている。PID制御において、最大の問題はPIDパラメータの調整である。特に線形システムに関しては、過去に様々な調整法が発表されている。また、近年では従来の1入出力システムにとどまらず、多入出力システムや非線形システムに対する調整法も研究されるようになってきている。

本論文では非線形多入出力システムに対して新しい手法を提案する。これは閉ループシステムが平衡点の近傍内全ての点においてリアプノフ安定定理を満たすようなPIDパラメータの調整法である。PID制御器は設計の立場からは理論的扱いが困難であるが、ここに理論的洗練度の高い新しい手法を開発することが本論文の目的である。

最後にいくつかの多変数系非線形システムに対してシミュレーションを行うことにより、本手法の有効性を確認する。

2. 安定化制御器の設計

2.1 問題の定式化

次のような非線形アフィンシステムを考える。

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + G(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

ここで $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$, $y(t) \in R^m$, $C \in R^{m \times n}$ とし, $f: R^n \rightarrow R^n$, $G: R^n \rightarrow R^{n \times r}$ とする。

(1b)より出力フィードバックPIDコントローラは次のように定義される。

$$u(t) = -K_I \int_0^t Cx(\tau) d\tau - K_P Cx(t) - K_D C\dot{x}(t) \quad (2)$$

ただし、係数行列 $K_P, K_I, K_D \in R^{r \times m}$ であり、定数とする。なお、以後 $\{K_P, K_I, K_D\}$ を簡略化して K と表記することがある。

$$\text{ここで} \quad z(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau = \int_0^t Cx(\tau) d\tau \quad (3)$$

とおく。(2)に(3)を代入すると次のようになる。

$$u(t) = -K_I z(t) - K_P Cx(t) - K_D C\{f(x(t)) + G(x(t))u(t)\} \quad (4)$$

ここで

$$\text{rank}(I + K_D CG(x(t))) = r \quad (5)$$

を満たすならば逆行列が存在し、(4)は次のように書ける。

$$u(t) = -(I + K_D CG(x(t)))^{-1} \{K_I z(t) + K_P Cx(t) + K_D Cf(x(t))\} \quad (6)$$

それでは閉ループシステム(1)が漸近安定なシステムになるように、係数パラメータ K_P, K_I, K_D を決定する問題を定式化する。そのためにはリアプノフ安定定理を用いる。ただし、リアプノフ安定定理は入力が恒等的に零である自由システムに対して内部安定性を解析する定理である。そのため入

力を含むシステム(1)には直接適用できない。そのため(6)を(1)に代入して $u(t)$ を消去したシステムに対してリアプノフ安定定理を用いることを考える。(6)を(1)に代入し(4)を考慮すれば、次式をうる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) - G(x)(I + K_D CG(x))^{-1} \\ \{K_I z + K_P Cx(t) + K_D Cf(x)\} \\ Cx(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

つまり変数 z を導入した目的は、システム(1)を、リアプノフ安定定理を用いるために(7)で表される自由システムに変換することにある。

2.2 PIDパラメータ調整法

では、システム(7)に対してリアプノフの安定定理を適用することを考える。 x, z に対して、正定リアプノフ関数候補 $V(x, z)$ を次のように定める。

$$V(x, z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{where } Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここで Q は正定対称行列であり $Q_{11} \in R^{n \times n}$, $Q_{12} \in R^{n \times m}$, $Q_{21} \in R^{m \times n}$, $Q_{22} \in R^{m \times m}$ である。

(7)に沿っての時間微分 $\dot{V}(x, z)$ を求めると次のようになる。

$$\dot{V}(x, z) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

このとき、次式を満たせばシステム(7)の平衡点 $(x_e, z_e) = (0, 0)$ は漸近安定である。

$$\dot{V}(x, z) \leq -\rho(x, z) \quad (10)$$

ただし $\rho(x, z) > 0$ である。

(10)の右辺を左辺に移項し、左辺を関数 F とおくと、次のように書き直せる。

$$F(x, z; K) \leq 0 \quad (11)$$

条件式(11)の意図するところは、システム(7)の解軌道 (x, z) に対して、関数 F を負にするようにパラメータ $K \triangleq \{K_P, K_I, K_D\}$ を求めるということである。しかし、リアプノフの安定定理は、平衡状態の近傍領域について考えており、一般的には局所的漸近安定の条件式である。

そこで x, z の平衡状態(目標値)の近傍領域を Ω_x, Ω_z (このような領域を漸近安定領域とよぶ)とし、次のmin-max問題と考える。

$$\min_{K_P, K_I, K_D} \max_{(x, z) \in \Omega_x \times \Omega_z} F(x, z; K) \quad (12)$$

(12)を考えた理由は、 F の x, z に関する最大値 $\max F$ を最小化し、それが0以下になれば、 Ω 内すべての点で F は0以下となり、不等式(11)を満たす K_P, K_I, K_D が求められるからである。

問題(12)を解くために、関数 F の最大値関数を次のようにおく。

$$J(K) \triangleq \max_{(x, z) \in \Omega_x \times \Omega_z} F(x, z; K) \quad (13)$$

ここで、問題 (12) は最大関数 $J(K)$ をパラメータ K_P, K_I, K_D に関して最適化する問題として考えられる。そのためには最大関数 $J(K)$ の K_P, K_I, K_D に関する勾配が必要となる。

最大化の方法

まず (13) において、 $F(x, z; K)$ の x, z について最大化問題は次のように行う。

x, z の漸近安定領域 Ω を離散化し、その離散点集合 Δ を次のように構成する。ただし $(x, z)^p$ は p 番目の点という意味である。

$$\Delta = \{(x, z)^p | (x, z) \in \Omega_x \times \Omega_z, p = 1, 2, \dots, P\} \quad (14)$$

よって (13) を次のような問題として考える。

$$J(K) \triangleq \max_p \{F((x, z)^p, K) | p = 1, 2, \dots, P\} \quad (15)$$

このように K を固定し離散点すべてを $F(x, z; K)$ に代入し、全点比較して最大値を求める。

勾配の計算

次に、一般勾配の一要素を計算する。最大関数の性質より、 $J(K)$ には次の命題がなりたつ。

(i) $J(K)$ は局所リップシツツ連続である。

(ii) $J(K)$ の一般勾配 (集合) $\partial^\circ J(K)$ は次式のように与えられる。ただし co は凸包を表す。

$$\partial_{K_P}^\circ J(K) = \text{co} \nabla_{K_P} F(\Phi(K), K) \quad (16a)$$

$$\partial_{K_I}^\circ J(K) = \text{co} \nabla_{K_I} F(\Phi(K), K) \quad (16b)$$

$$\partial_{K_D}^\circ J(K) = \text{co} \nabla_{K_D} F(\Phi(K), K) \quad (16c)$$

ここで $\Phi(K)$ は次のような最大解集合である。

$$\Phi(K) \triangleq \{x^*, z^* | F(x^*, z^*, K) = J(K)\} \quad (17)$$

$J(K)$ の一般勾配は (16a) ~ (16c) で与えられる。したがって最大関数 (13) を解き、一般勾配の少なくとも一つの要素

$$\nabla_{K_P} F(x^*, z^*, K) \in \partial_{K_P}^\circ J(K), (x^*, z^*) \in \Phi(K) \quad (18a)$$

$$\nabla_{K_I} F(x^*, z^*, K) \in \partial_{K_I}^\circ J(K), (x^*, z^*) \in \Phi(K) \quad (18b)$$

$$\nabla_{K_D} F(x^*, z^*, K) \in \partial_{K_D}^\circ J(K), (x^*, z^*) \in \Phi(K) \quad (18c)$$

をうることができる。 (x^*, z^*) は最大解集合 $\Phi(K)$ の中のある一つの最大解である。

勾配法としては最急降下法を用いる。反復計算をして実行し、 $J(K) = 0$ になるまでイテレーションを行えば一つの安定な PID コントローラを得ることができる。次節では 2 リンクロボットマニピュレータのシミュレーション結果を示す。

3. シミュレーション

以下のような 2-Link Manipulator について考える。

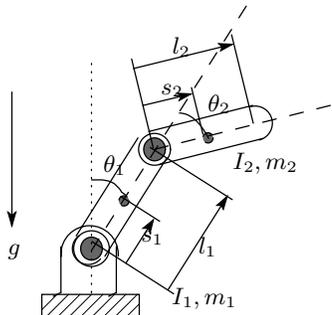


Fig.1: 2-Link Manipulator

摩擦とその他の外乱がないと仮定すると、一般に 2-Link 構造のロボットマニピュレータのダイナミクスは 2 階の非線形微分方程式で表現される [2]。

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + D\dot{\theta} + g(\theta) = E\tau$$

$(\theta, \dot{\theta})^T = (x_1, x_2)^T$, $E\tau = u$ とし、状態空間表現に変換すると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M(\theta)^{-1}\{C(\theta, \dot{\theta}) + D\dot{\theta} + g(\theta)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M(\theta)^{-1} \end{bmatrix} u \quad (19)$$

(18) の勾配は以下のように簡単に導出される。

$$\begin{aligned} \nabla_{K_P} F(x^*, z^*; K) \\ = -((x^{*T} Q_{11} + z^{*T} Q_{21})G(x^*))^T (Cx^*)^T \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{K_I} F(x^*, z^*; K) \\ = -((x^{*T} Q_{11} + z^{*T} Q_{21})G(x^*))^T z^{*T} \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{K_D} F(x^*, z^*; K) \\ = -((x^{*T} Q_{11} + z^{*T} Q_{21})G(x^*))^T (Cf(x^*))^T \end{aligned} \quad (20c)$$

前述したアルゴリズムにより K_I, K_P, K_D を計算する。調整パラメータの初期点 K_I^1, K_P^1, K_D^1 は任意の適当な値を与える。得られた K_I^o, K_P^o, K_D^o を以下に示す。

$$K_I^o = \begin{bmatrix} 0.58 & 0 \\ 0 & 2.91 \end{bmatrix}, K_P^o = \begin{bmatrix} 166.16 & 0 \\ 0 & 100.75 \end{bmatrix}$$

$$K_D^o = \begin{bmatrix} 131.66 & 0 \\ 0 & 80.43 \end{bmatrix}$$

最大関数 $J(K)$ の更新の様子と、この PID パラメータにより、(19) を制御したときの応答を示す。

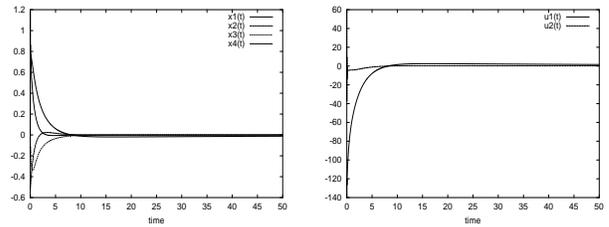


Fig.2: 2-Link Manipulator の PID 制御

目標値 $y_{d1} = 0, y_{d2} = 0$ ($y_1 = x_1, y_2 = x_2$)

初期値 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, 0, 0)$

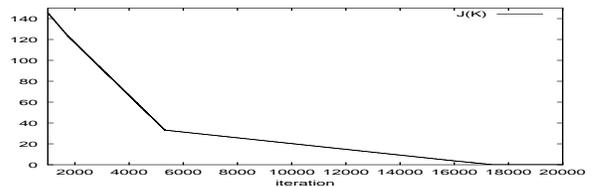


Fig.3: 最大関数 $J(K)$ の更新の様子

5. 結論

本論文ではリアプノフ安定定理に基づく、非線形多入出力システムに対する新たな PID パラメータ調整法を示した。シミュレーション結果より、閉ループ系は漸近安定化されており、本論文の手法は有効であるといえる。

近年リアプノフ関数は内部システムの安定性だけでなく性能評価の解析にも用いられている。そこで (8) にある種の制約条件を付加することにより制御成績を考慮した PID パラメータの導出が同一の理論により可能であると考えている。

6. 参考文献

- [1] Ito, Shimizu : Design of Neural Stabilizing Controller for Nonlinear Systems via Lyapunov's Direct Method, IEEE int Conf Neural Netw Proc, Vol.3, 2146/2151, 1999
- [2] 美田 : 非線形制御入門, 昭晃堂, 2000