

# 年齢分布を考慮した個体数システムの制御

- 種々の死亡率のもとにおける最適出生率の決定 -

## Control of Age-Dependent Population Systems

-Determination of Optimal Birth Rates under Various Mortality Rates-

80223709 三村篤司 (Atsushi Mimura)

Supervisor 国松昇 (Noboru Kunimatsu)

### 1 目的

本研究では年齢分布を考慮した線形個体数システムおよび非線形個体数システムに日本の人口統計量を適用し、安定性の評価および設定した目標年齢分布を実現する最適出生率の決定を目的とする。

### 2 システムの表現

本研究で扱う線形個体数システムは偏微分方程式により次のように表される。

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial t} = -\mu(a)p(a,t), \quad (1)$$

$$p(a,0) = p_0(a), \quad (2)$$

$$p(0,t) = \beta(t) \int_{a_1}^{a_2} k(a)h(a)p(a,t)da, \quad (3)$$

ここで、 $a$  は年齢、 $t$  は年度、 $p(a,t)$  は人口密度関数、 $\mu(a,t)$  は死亡率、 $\beta(t)$  は平均出生率、 $k(a)$  は女性比率、 $h(a)$  は出産型関数である。式 (2) は初期条件、式 (3) は境界条件である。本研究では (1)-(3) の線形システムに加え、死亡率を非線形化した次の非線形個体数システムも取り扱う。

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial t} = -\{\mu(a) + \delta \cdot p(a,t)\}p(a,t), \quad (4)$$

ここで、初期条件および境界条件は (2),(3) と同一である。

### 3 安定性の評価

安定性の評価には、[3] による方法を用いた。線形個体数システムおよび線形化個体数システムにおいて伝達関数を定義し、個体数システムの開ループ伝達関数のベクトル軌跡を描くことにより、スモールゲイン定理を適用し安定性の評価を行った。

### 4 最適制御問題

最適出生率を算出するにあたっては次の評価関数を用いた。

$$J(\beta, T) = \int_0^T \left\{ \int_0^\infty (p(a,t) - p^*(a))^2 da \right\} dt, \quad (5)$$

ここで、 $p^*(a)$  は目標年齢分布であり、 $T$  は目標を実現するための期間である。許容制御集合  $U_{ad} = \{\beta(t) | 0 \leq \beta \leq \beta_{cr}, t \in [0, T]\}$  に属する  $\beta(t)$  の中で  $J(\beta, T)$  を最小にする  $\beta$  を最適出生率と定義し、 $\beta^*(t)$  とし、最急降下法により計算を行った。

### 5 計算結果

数値計算により得られた周波数伝達関数のベクトル軌跡を図 1 に、最適出生率を図 2 に、最適出生率に基づいて  $t = T$  において得られる人口状態を図 3 に、 $T$  年間の潜在扶養比率を図 4 に示す。計算においてはすべての統計量は 2000 年における日本の統計量を用い、 $T = 100$ 、 $\delta = 3.0 \times 10^{-9}$  とした。潜在扶養比率とは 65 歳以上の人口に対する、15 歳以上 65 歳未満の人口の比を表し、目標状態は潜在扶養比率が 4 になるよう設定した。

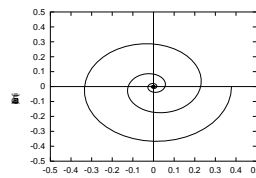


図 1: ベクトル軌跡

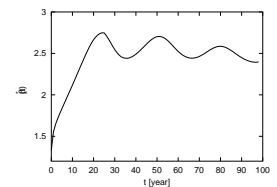


図 2: 最適出生率

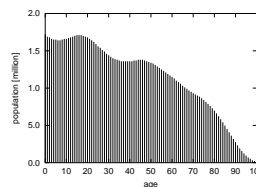


図 3: 人口状態

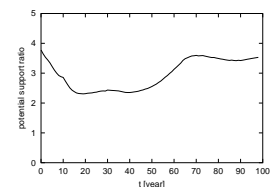


図 4: 潜在扶養比率

### 6 結論

死亡率の非線形化が安定性、最適出生率、潜在扶養比率に与える影響を調べることができた。また、 $T$  が時定数より大きい場合においては、種々の死亡率のもとにおける最適出生率を決定することができた。しかし  $T$  が時定数より小さい場合には目標状態を実現しているとは言いがたく、移民を認めるなど、さらなる検討が必要である。

#### 参考文献

[1] 三村篤司, 阿部淳, 国松昇, "個体数システムの最適制御 - 日本における高齢化の緩和 -", 応用数学会 2002 年度年会講演予稿集.

[2] S.Jian, Y.Jingyuan, "Population System Control", Springer-Verlag, (1988).

[3] N.Kunimatsu, 'Robust Stability of Population Dynamical Systems', 6th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (2004), to appear.