2003-06-01

多次元 Lotka ー Volterra 方程式の解の挙動について

On the Dynamics of Multi-Dimensional Lotka-Volterra Equations

80221359 阿部淳 (Jun Abe) Supervisor 国松昇 (Noboru Kunimatsu)

1 個体数研究の歴史

数理生態学は 1798 年のマルサスの人口論に始まる. 人口が指数関数的に増加する傾向があることをマルサスは発見し, マルサス方程式を導いた. しかし実存する生物個体群の多くは環境の様々な影響を受け, 時間が経過するにつれて増加率は減り, 無限時間後にある一定の値に飽和的に収束してしまうはずである. そのように考えた P.F.Verhulst は, マルサス方程式を改め, ロジスティック方程式を導いた. その後 A.J.Lotka と V.Volterra らによって個体群の変動に多種間の影響を考慮したモデルが発案され, 個体数力学研究の糸口となった. 彼らの発見した方程式は一般化され, 以下のような Lotka ー Volterra 方程式として研究されている.

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(\epsilon + \sum_{s=1}^{n} a_{rs}N_s\right) \tag{1}$$

2 使用する式と定理

(1) 一般の Lotka ー Volterra 方程式

$$\dot{x_i} = x_i\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \tag{2}$$

x_i:個体数密度関数　b_i:固有変化率
a_{ij}:j 番目の個体から i 番目の個体への影響

(2) 超平面に関する定理

$\boldsymbol{x} \in R^n, i \in R$ であるシステム

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, t) \tag{3}$$

において, 集合 Ω 中に存在するいかなる初期点 x_0 に対しても,$t \geq t_0$ なる全ての t に対して解 $\boldsymbol{x}(t; x_0, t_0)$ が Ω 中に存在していれば,Ω は不変であるという. この時 Ω が平面であれば, それを不変超平面と呼ぶ.

3 サイクリック型 Lotka ー Volterra 方程式

(1) 方程式

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1(1 - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n)\\
\dot{x_2} &= x_2(1 - c_nx_1 - c_1x_2 - \cdots - c_{n-1}x_n)\\
&\vdots\\
\dot{x_n} &= x_n(1 - c_2x_1 - c_3x_2 - \cdots - c_1x_n)
\end{aligned} \tag{4}$$

サイクリック型方程式とは, このように係数 $c_1, ..., c_n$ が巡回的である方程式を指す.

(2) 不変超平面に関して判明している事実

三次元においては $2c_1 = c_2 + c_3$, 四次元においては $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 = 0, c_1 - c_3 = 0$ が成り立つ時に不変超平面が存在し, その方程式はそれぞれ

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{c_1 + c_2 + c_3}, \tag{5}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{4}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}, \tag{6}$$

である.

4 ハミルトニアン Lotka ー Volterra 方程式

(1) 方程式および不変超平面

$$\dot{x_i} = x_i\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right), \quad i \in R, \quad i = 1, ..., n. \tag{7}$$

この方程式はまた, 係数を用いた関係式

$$B_l(a_{lj} - b_lB_j) = -B_j(a_{jl} - b_jB_l) \tag{8}$$

によって定まる $B_l \in R$ を用いて表される式,

$$1 + \sum_{l=1}^{n} B_lx_l = 0 \tag{9}$$

を不変超平面にもつ. これによりリヤプノフ関数も決定する.

$$V(x) = \left(\prod_{l=1}^{n} x_l^{\beta_l}\right)\left(1 + \sum_{l=1}^{n} B_lx_l\right) \tag{10}$$

$$\dot{V}(x) = (\beta \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{b})V(x) \tag{11}$$

ただし,$A = [a_{ij}], \beta = (b_1B_1, ..., b_nB_n)A^{-1}$.

(2) 予想されること

三次元の場合

- 第１象限内に不動点が存在しなければ, 全ての解軌道は境界もしくは無限へと伸びる.
- 内部の不動点が唯一存在すれば, 全ての軌道は境界, 無限, または半安定な不変超平面へと伸びる.

四次元の場合

- 各純虚数の固有値に対して, 周期軌道で埋め尽くされた二次元多様体が平衡点付近に存在する.
- 以下の二つの運動定数が存在する.

$$H(x) = x_1x_2x_3x_4\left(b - \sum_{l=1}^{4} B_lx_l\right) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
K(x) &= b(x_2x_3 + x_2x_4 + x_1x_3) - x_2^2x_3 - x_2^2x_4\\
&- x_2x_3^2 - 2x_2x_3x_4 - x_1x_3^2\\
&- 2x_1x_2x_3 - x_1^2x_3 - x_4^2x_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

- 各正のエネルギー多様体上に, 少なくとも１つの周期軌道が存在する.

5 計算結果

(1) 三次元ハミルトニアン Lotka − Volterra 方程式

不変超平面を $x_1+x_2+x_3=1$ とし, 式（8）を満たすような a_{jl}, b_l を決定した. そして初期点を第１象限内の三つの領域, 領域 $x_1+x_2+x_3>1$, 領域 $x_1+x_2+x_3=1$, 領域 $x_1+x_2+x_3<1$ に取り, 解を計算させた. すると図１〜図３のグラフような結果が得られた.

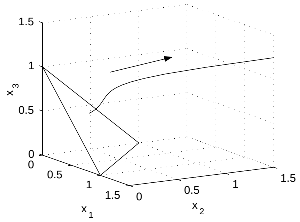

図１：初期点が領域 の時

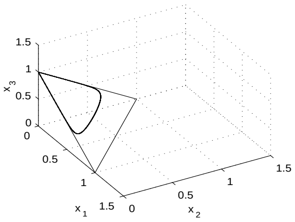

図２：初期点が領域 の時

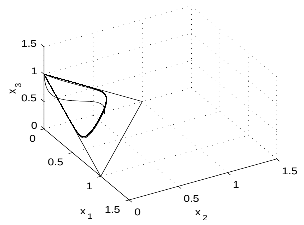

図３：初期点が領域 の時

(2) 四次元ハミルトニアン Lotka − Volterra 方程式

三次元と同様に不変超平面を $x_1+x_2+x_3+x_4=1$ とし,（8）を満たす a_{jl}, b_l を決定した. そして初期点を領域 ’ $x_1+x_2+x_3+x_4>1$, 領域 ’ $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, 領域 ’ $x_1+x_2+x_3+x_4<1$ に取り, 解を計算させた. その際, 四次元であるため $x_4=0$ への射影をし, グラフを得た.

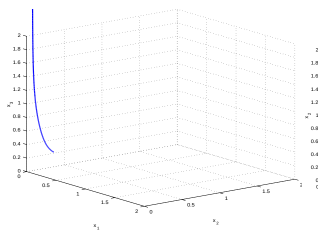

図４：初期点が領域 ’ の時

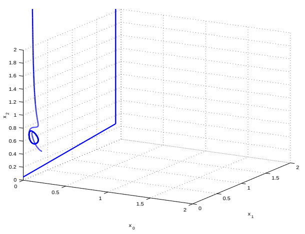

図５：初期点が領域 ’ の時

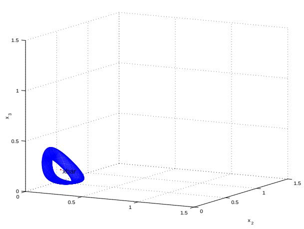

図６：初期点が領域 ’ の時

6 考察

(1) サイクリック型 Lotka − Volterra 方程式について

数値計算により, 三次元・四次元における不変超平面の存在は確認されていた. しかしそれについての理論的な説明がされていなかった. そこで中心多様体定理を用いて,n 次元サイクリック型 Lotka − Volterra 方程式において中心多様体が存在する時, それがどのような多様体であるかを求めた. すると以下のような命題を得た.

命題 n 次元サイクリック型 Lotka − Volterra 方程式において中心多様体は存在し, それは超平面

$$\sum_{l=1}^{n} x_l = \frac{n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}. \tag{14}$$

この命題により,$n=3,4$ の時の説明が可能である.

(2) 三次元ハミルトニアン Lotka − Volterra 方程式

初期点がどの領域に存在しているかによって $V(x)$ の符号は異なり, それによって $\dot{V}(x)$ の符号も異なる. したがって初期点をどの領域に取るかにより, 同じシステムでもその後の解の挙動は異なるものになる. 今回の数値計算によりそれが確認できた. また $\dot{V}(x)$ の符号変化がこれとは逆の場合も数値計算を行ったが, 同内容の結果が得られた. 三次元ハミルトン系では不変超平面は半安定であり, 解の挙動を予測する上で非常に重要なものである.

(3) 四次元ハミルトニアン Lotka − Volterra 方程式

初期点を領域 ’, ’ に取ったとき, 解は発散してしまった. しかし領域 ’ に取った時には, 何らかの周期性が存在しているであろうことがグラフから読み取れた. そこで各座標についての関係を調べたところ

$$x_1^2+x_2^2=一定,\quad x_3^2+x_4^2=一定 \tag{15}$$

$$x_1^2+x_3^2=一定,\quad x_2^2+x_4^2=一定 \tag{16}$$

が得られた. これにより二つの二次元トーラスが存在していることが確認された.

7 参考文献

[1]Mafred Plank,“ On the Dynamics of Lotka-Volterra equations having an invariant hyper plane ”,J.Appl.Math.,vol59,1540-1551,1999.

[2] 赤沢知美,“ 三次元 Lotka − Volterra 方程式の解の挙動と不変超平面 ”, 平成 14 年慶應義塾大学卒業論文,2001.

[3] 山田一成,“ 多種生物モデルの安定解析と計算機シミュレーション ”, 平成 13 年度慶應義塾大学大学院修士論文,2001.

[4]Manfred Plank,“ Bi-Hamiltonian systems and Lotka-Volterra equations: a three-dimensional classification ”,J.Nonlinearity,887-896,1996.

[5] 井村順一,“ システム制御のための安定論 ”, コロナ社,79-85,2000.