

# 線形時変確率系に対する推定値の不確かさを考慮した一般化予測制御

## A Cautious Generalized Predictive Control for Linear Time-Variant Stochastic Systems

80223003 中里祥治 (Yoshiharu Nakazato) 指導教員 大森浩充 (Hiromitsu Ohmori)

### 1 はじめに

予測制御法の中で最も普及している一般化予測制御法 (GPC) は、ある時間区間の追従誤差と操作量を評価規範に取り込んだ制御則であり、化学プラント制御などで多くの実績がある。しかし、同定すべき未知パラメータが時間とともに変動する (ドリフトする) 場合には、制御性能が大きく劣化し、問題とされていた。本論文では、(1) モデルを通して雑音により変動する未知パラメータを推定する内部モデル型のカルマンフィルタを提案し、(2) その際の推定値の不確かさを制御則で考慮した (cautious)、一般化予測制御を提案し、提案手法の解析を行うとともに、その有効性を数値シミュレーションにより確認する。

### 2 問題設定

対象とするシステムは、次式のような時変係数をもつ ARMAX モデルで記述されるものとする。

$$A(z^{-1}, k)y(k) = B(z^{-1}, k)u(k-d) + C(z^{-1}, k)v(k) \quad (1)$$

$y(k)$  は出力、 $u(k)$  は入力、 $d$  はむだ時間である。ただし、

$$\left. \begin{aligned} A(z^{-1}, k) &= 1 + a_1(k)z^{-1} + \dots + a_n(k)z^{-n} \\ B(z^{-1}, k) &= b_0(k) + b_1(k)z^{-1} + \dots + b_m(k)z^{-m} \\ C(z^{-1}, k) &= 1 + c_1(k)z^{-1} + \dots + c_\ell(k)z^{-\ell} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とする。 $v(k)$  は平均値 0、分散  $\sigma_v^2$  の正規白色雑音である。

(1) における出力方程式は、以下のような回帰ベクトルと時変パラメータで表現できる。

$$\begin{aligned} y(k) &= \phi_*^T(k-1)\theta(k) + v(k) \quad (3) \\ \phi_*^T(k-1) &= [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d), \dots, \\ &\quad u(k-m-d), v(k-1), \dots, v(k-\ell)]^T \\ \theta(k) &= [a_1(k), \dots, a_n(k), b_0(k), \dots, b_m(k), c_1(k), \\ &\quad \dots, c_\ell(k)]^T \end{aligned}$$

である。ここで、時変パラメータ  $\theta(k)$  は以下のモデルで変動すると仮定する。

$$D(z^{-1})\theta(k) = N(z^{-1})w(k) \quad (4)$$

ただし

$$D(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{N_d} d_i z^{-i}, \quad N(z^{-1}) = I + \sum_{i=1}^{N_n} N_i z^{-i}$$

とする。また、 $w(k)$  は平均値  $[0, \dots, 0]^T$ 、分散  $\Sigma_w$  の正規白色雑音ベクトルである。

提案法は以下の評価関数

$$J_{GPC} = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} \{y(k+j) - y_m(k+j)\}^2 \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{NU} \lambda(j) \{u(k+j-d)\}^2 \right\} \quad (5)$$

を最小化することを目的とする。 $\lambda(j)$  は入力重みであり、 $N_1 \sim N_2$  および  $1 \sim NU$  はそれぞれ一致区間、制御区間を表している。さらに、参照モデル出力  $y_m(k+j)$  は

$$\left. \begin{aligned} y_m(k) &= y(k) \\ y_m(k+j) &= \alpha \cdot y_m(k+j-1) + (1-\alpha)y_r(k) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

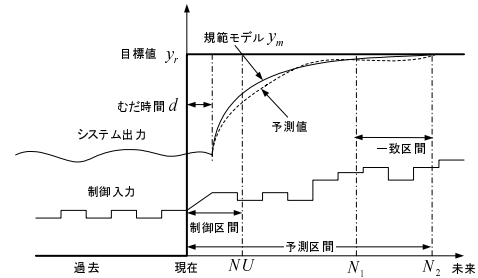


図 1: 多段予測の概念図

### 3 パラメータ調整則の導出

(4) 式を状態空間表現するために、

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{I}{D(z^{-1})} w(k) \\ \theta(k) &= N(z^{-1})x(k) \\ X(k) &= [x^T(k-N_d+1), \dots, x^T(k)]^T \end{aligned}$$

と定義すれば、

$$X(k) = AX(k-1) + Bw(k) \quad (7)$$

$$\theta(k) = CX(k) \quad (8)$$

と表すことができる。ただし

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I \\ -d_{N_d}I & \dots & \dots & -d_1I \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad N_{N_n}I \quad \dots \quad N_1I \quad I] \end{aligned}$$

である。したがって (3) より次式となる。

$$y(k) = \phi_*^T(k-1)CX(k) + v(k) \quad (9)$$

この状態空間表現より、推定アルゴリズムは次のようになる。

## パラメータ調整則

$$\phi(k-1) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d), \dots, u(k-m-d), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-\ell)]^T \quad (10)$$

$$\hat{X}(k) = A \left( \hat{X}(k-1) + K(k) \times [y(k) - \phi^T(k-1)C\hat{X}(k-1)] \right) \quad (11)$$

$$K(k) = P(k-1)C^T\phi(k-1) \times [\phi^T(k-1)CP(k-1)C^T\phi(k-1) + \sigma_v^2]^{-1} \quad (12)$$

$$P(k) = A(P(k-1) - K(k)\phi^T(k-1)CP(k-1))A^T + B\Sigma_w B^T \quad (13)$$

$$\hat{v}(k) = y(k) - \phi^T(k-1)CA^{-1}\hat{X}(k-1) \quad (14)$$

$$\hat{\theta}(k) = C\hat{X}(k) \quad (15)$$

となる。

注意  $A$  は安定行列なので必ず  $A^{-1}$  が求まる。

## 4 制御則の導出

従来の GPC は、推定値を真値とみなす確定性等価原理に基づいて制御入力を計算する。これは未知パラメータに対する推定精度を考慮しておらず、パラメータが時変の場合には性能の劣化が見られる。したがって本節では、パラメータの不確かさを考慮した FPC アルゴリズムの手順を紹介する。

【step 1】: パラメータ調整則 (10) ~ (15) を用いて未知パラメータ  $\theta(k)$  を推定する。

【step 2】: 次式の Diophantine 方程式に基づいて  $\hat{E}_j(z^{-1}, k)$  と  $\hat{F}_j(z^{-1}, k)$  を計算する。 ( $j = 1, \dots, N_2$ )

$$\hat{C}(z^{-1}, k) = \hat{E}_j(z^{-1}, k)\hat{A}(z^{-1}, k) + \hat{F}_j(z^{-1}, k)z^{-j}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_j(z^{-1}, k) &= 1 + e_1(k)z^{-1} + \dots + e_{j-1}(k)z^{-(j-1)} \\ \hat{F}_j(z^{-1}, k) &= f_0^j(k) + f_1^j(k)z^{-1} + \dots + f_n^j(k)z^{-(n-1)} \end{aligned} \right\}$$

である。

【step 3】:  $\hat{R}_j(z^{-1}, k+j)$  と  $\hat{S}_j(z^{-j}, k+j)$  を

$$\hat{E}_j(z^{-1}, k+j)\hat{B}(z^{-1}, k+j) = \hat{C}(z^{-1}, k+j)\hat{R}_j(z^{-1}, k+j) + \hat{S}_j(z^{-j}, k+j)z^{-j} \quad (16)$$

を用いて求める。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \hat{R}_j(z^{-1}, k+j) &= \hat{r}_0(k+j) + \dots + \hat{r}_{j-1}(k+j)z^{-(j-1)} \\ \hat{S}_j(z^{-1}, k+j) &= \hat{s}_0^j(k+j) + \hat{s}_1^j(k+j)z^{-1} + \dots + \hat{s}_{n_3}^j(k+j)z^{-n_3} \end{aligned} \right\}$$

$n_3 = \max\{m, \ell\} - 1$  である。

【step 4】:  $\hat{h}_j(k)$  を

$$\hat{C}(z^{-1}, k+j)\hat{h}_j(k) \triangleq \hat{F}_j(z^{-1}, k+j)y(k) + \hat{S}_j(z^{-1}, k+j)u(k-d) \quad (17)$$

を用いて求める。

【step 5】:  $u(k+j-d)$ ,  $y_m(k+j)$  および  $h_j(k)$  を要素とするベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &\triangleq [u(k+1-d), \dots, u(k+N_2-d)]^T \\ \hat{\mathbf{h}}(k) &\triangleq [\hat{h}_{N_1}(k), \dots, \hat{h}_{N_2}(k)]^T \\ \mathbf{y}_r(k) &\triangleq [y_m(k+N_1), \dots, y_m(k+N_2)]^T \end{aligned}$$

を求める。同様に  $\hat{R}_j(z^{-j}, k-d+j)$  の係数および  $\lambda(j)$  からなる行列

$$\hat{\mathbf{R}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{r}_{N_1-1}(k+N_1) & \dots & \hat{r}_0(k+N_1) & 0 & \dots & 0 \\ \hat{r}_{N_1}(k+N_1+1) & \dots & \dots & \hat{r}_0(k+N_1+1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hat{r}_{N_2-1}(k+N_2) & \dots & \dots & \dots & \dots & \hat{r}_0(k+N_2) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda(1), \dots, \lambda(NU), 0, \dots, 0\}$$

を求める。

【step 6】  $X(k)$  の共分散行列  $P(k)$  から、 $R(k)$  の共分散行列  $P_R(k)$  を算出する。

注意  $r_0(k), \dots, r_{N-1}(k)$  はシステムパラメータ  $\theta(k)$  から作られるので共分散を求めることができる。

【step 7】  $\hat{\Lambda}(k) = \Lambda + P_R(k)$  として、制御則を以下の式の基づいて計算し、

$$\mathbf{u}(k) = \left( \hat{\mathbf{R}}^T(k)\hat{\mathbf{R}}(k) + \hat{\Lambda}(k) \right)^{-1} \hat{\mathbf{R}}^T(k)\mathbf{y}_r(k) - \left( \hat{\mathbf{R}}^T(k)\hat{\mathbf{R}}(k) + \hat{\Lambda}(k) \right)^{-1} \hat{\mathbf{R}}^T(k)\hat{\mathbf{h}}(k) \quad (18)$$

上式の一行目を入力として用いる。

【step 8】 step 1 へ戻る。

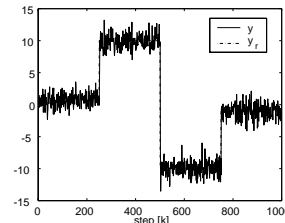
## 5 数値例

ARMAX モデル

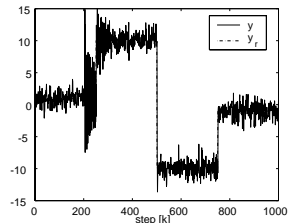
$$(1+a_1(k)z^{-1})y(k) = (b_0(k)+b_1(k)z^{-1})u(k-1) + (1+c_1(k)z^{-1})v(k)$$

$$D(z^{-1}) = (1-z^{-1})^2, N(z^{-1}) = I - \begin{bmatrix} 0.995 & 0 \\ 0 & 0.995 \end{bmatrix} z^{-1}$$

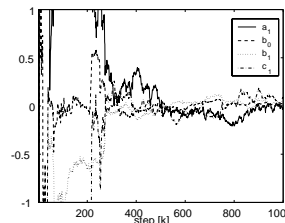
でパラメータを変動させた。また、 $N_1 = 1$ ,  $N_2 = NU = 3$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\lambda(j) = 0.1$  とし、 $\sigma_v = 1$ ,  $\Sigma_w = \text{diag}\{0.005, 0.005, 0.005, 0.005\}$  とした。



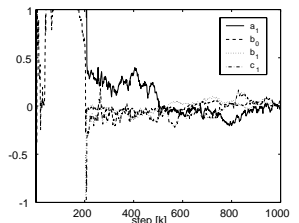
(a) 追従性能 (cautious)



(b) 追従性能 (CE)



(c) 推定誤差 (cautious)



(d) 推定誤差 (CE)

図 2: cautious と CE の性能比較

## 6 結論

モデルを通して雑音により変動する未知パラメータをもつモデルに対して、内部モデル型のカルマンフィルタを用いて時変パラメータを推定値した。また、その際の推定値の不確かさを考慮する一般化予測制御を提案し、その有効性を数値シミュレーションにより確認した。