

極配置法に基づく多変数系のPIDコントローラ設計法

80123299 本城 仰太 指導教員 志水 清孝

1. はじめに

本論文では、出力情報のみしか観測されず、可安定なMIMO（多入力多出力）線形システムに対し、極配置の手法を応用することによって新たなPIDコントローラ設計法を提案する。

純粋な出力フィードバックによる任意極配置可能な条件が文献[1]によって考案されている。提案する手法はこの任意極配置を応用した方法であり、PID制御を施した閉ループ系を漸近安定化させることを目的とする。任意極配置できるかどうかは入力と出力の次元、およびコントローラの構造に依存する。任意極配置ができない制御対象の場合は、擬似極配置法[2]とよぶ手法によって、できるだけ所望の極の近くに極配置する近似問題によって漸近安定化させる。

本論文の最後に、2-Link Manipulatorなどのいくつかの制御対象でシミュレーション実験を行い、本論文手法の有効性を示す。

2. 任意極配置によるPIDコントローラの導出

次のような可制御・可観測な線形システムを考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (1)$$

ただし $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$ である。ここで積分器 $\dot{u} = v$ を導入し、(1)とあわせて拡大系にすると

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}v \\ \text{where } \bar{x} &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} O \\ I_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。PID制御則を次のように定義する。

$$u = -K_I \int_0^t y dt - K_P y - K_D \dot{y} + u_0 \quad (3)$$

簡単化のため $CB = O$ とし、(3)を微分した速度型PID制御則は

$$\begin{aligned} v &= -\bar{K}\bar{x} \\ \text{where } \bar{K} &= [K_I C + K_P C A + K_D C A^2 \quad K_D C A B] \end{aligned} \quad (4)$$

となる。これを(2)に代入すると、PID制御による閉ループ系として次式を得る。

$$\dot{\bar{x}} = A_{cl}\bar{x}, \quad \text{where } A_{cl} = \bar{A} - \bar{B}\bar{K} \quad (5)$$

このとき、PID制御による閉ループ系(5)の $n+r$ 個の極のうち、入力は r 次元であるので少なくとも r 個は任意に決定できるフィードバックゲイン $\bar{K}$ が存在する。

ここで任意に決定できる r 個の固有値を $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ とする。 r 個の固有ベクトルからなる固有ベクトル行列 $W_r \in R^{r \times (n+r)}$ を $W_r = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_r]^T$ とすると次のような関係を考えることができる。

$$W_r A_{cl} = \Lambda_r W_r, \quad \text{where } \Lambda_r = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} \quad (6)$$

ここで(6)の関係がなりたつもとで、次の定理が導かれることを示す。

定理 1 閉ループ系(5)のすべての固有値は、 Λ_r に含まれる r 個と、次のような状態フィードバックによる閉ループ系

$$\dot{\hat{x}} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{K})\hat{x} \quad (7)$$

の n 個からなっている。ただし $\hat{A} = S_2 \bar{A} \bar{B}_c$, $\hat{B} = S_2 \bar{A} \bar{B}$ であり、状態フィードバックゲイン

$$\hat{K} = (W_r \bar{B})^{-1} W_r \bar{B}_c \quad (8)$$

である。ただし $\bar{B}_c$ は $[\bar{B} \ \bar{B}_c]$ が逆行列を持つような任意の $(n+r) \times n$ 行列であり、 $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = [\bar{B} \ \bar{B}_c]^{-1}$ である。

(証明) 次のような変換行列 $T \in R^{(n+r) \times (n+r)}$ を考える。

$$T = \begin{bmatrix} O & I_n \\ M & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 \\ MS_1 - NS_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし I_n は n 次元正方行列、 $M \in R^{r \times r}$, $N \in R^{r \times n}$ は任意の行列であるが、 M は逆行列をもたねばならない。

ここで、行列 M, N を次のように設定する。

$$M = W_r \bar{B}, \quad N = -W_r \bar{B}_c \quad (10)$$

A_{cl} に正則変換を施すと

$$T A_{cl} T^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{B}\hat{K} & \hat{B}M^{-1} \\ O & \Lambda_r \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。(11)は左下が零行列になっていることに意味がある。すなわち閉ループ系の $n+r$ 個の固有値は、入力の次元によって自由に設定することのできた Λ_r の r 個と、状態フィードバックによる閉ループ系 $\hat{A} - \hat{B}\hat{K}$ の n 個からなる。以上が定理1の証明である。■

定理1は、出力フィードバック問題は n 次元の状態フィードバック制御問題と等価であることを意味している。ただし、状態フィードバックゲイン $\hat{K}$ は(8)を満たさねばならないので、(8)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \hat{K} - (W_r \bar{B})^{-1} W_r \bar{B}_c &= O \\ W_r (\bar{B}\hat{K} - \bar{B}_c) &= O \end{aligned} \quad (12)$$

ゆえに

$$w_i^T (\bar{B}\hat{K} - \bar{B}_c) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (13)$$

(13)は n 次元線形代数方程式である。この方程式を解くために $n+r$ 次元の固有ベクトル w_i は少なくとも n 以上の自由度がなくてはならない。

しかし w_i は自由に設定できるというわけではなく、すでに設定した入力の次元 r 個の極 λ_i , $i = 1, 2, \dots, r$ に対して制約が生じる。それゆえ、(6)より次のような関係を満たさねばならない。

$$\begin{aligned} w_i^T (\bar{A} - \bar{B}\bar{K}) &= \lambda_i w_i^T \\ -w_i^T \bar{B}\bar{K} &= w_i^T (\lambda_i I - \bar{A}) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで次のような m 次元ベクトルを定義する。

$$z_{Ii}^T = w_i^T \bar{B} K_I, \quad z_{Pi}^T = w_i^T \bar{B} K_P, \quad z_{Di}^T = w_i^T \bar{B} K_D \quad (15)$$

これらを用いて (14) を書き換える．

$$-z_i^T \begin{bmatrix} C & O \\ CA & O \\ CA^2 & CAB \end{bmatrix} = w_i^T (\lambda_i I - \bar{A}) \quad (16)$$

ただし $z_i \in R^{3m}$ で $z_i^T = [z_{Ii}^T \ z_{Pi}^T \ z_{Di}^T]$ であり

$$Z_r = \begin{bmatrix} z_1^T \\ z_2^T \\ \vdots \\ z_r^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{I1}^T & z_{P1}^T & z_{D1}^T \\ z_{I2}^T & z_{P2}^T & z_{D2}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{Ir}^T & z_{Pr}^T & z_{Dr}^T \end{bmatrix} = [Z_{rI} \ Z_{rP} \ Z_{rD}]$$

また (15) より K_I, K_P, K_D は次のように書ける．

$$K_I = (W_r \bar{B})^{-1} Z_{rI} \quad (17a)$$

$$K_P = (W_r \bar{B})^{-1} Z_{rP} \quad (17b)$$

$$K_D = (W_r \bar{B})^{-1} Z_{rD} \quad (17c)$$

ここで (16) を変形し, (13) に代入すると, w_i が消去された z_i だけの式が求まる．

$$-z_i^T \begin{bmatrix} C & O \\ CA & O \\ CA^2 & CAB \end{bmatrix} (\lambda_i I - \bar{A})^{-1} (\bar{B} \hat{K} - \bar{B}_c) = O \quad (18)$$

この式から z_i を導出するのであるが, ここで

$$\begin{bmatrix} C & O \\ CA & O \\ CA^2 & CAB \end{bmatrix} (\lambda_i I - \bar{A})^{-1} (\bar{B} \hat{K} - \bar{B}_c)$$

の構造が重要になってくる．この行列はすべて決定済みであり, $3m \times n$ の定数行列である．もし $3m = n$ の正方行列ならば, この行列が逆行列をもたない特殊な場合のみ z_i は零でない値として導出される．また, $3m > n$ の場合は, z_i を導出するための自由度が十分にある． $3m < n$ の場合は, 明らかに z_i を導出することができない．

以上をまとめると $3m > n$ の場合 (18) によって z_i を決定することができる． z_i が決まれば, (16) によって一意に w_i を計算することができる．こうして Z_{rI}, Z_{rP}, Z_{rD} と W_r も求まるので, (17a), (17b), (17c) によって, PID ゲイン K_I, K_P, K_D が導出される．

3. コントローラ設計のまとめ

純粋な出力フィードバック (P 制御) のときに任意極配置できるための条件は, 文献 [1] により, $r + m > n$ である．また, 2 節で示した手法と同様に考えると, PD 制御のときには $r + 2m > n$ である．任意極配置可能な条件をまとめると以下ようになる．

Tbl.1: 任意極配置可能な条件

P	$r + m > n$
PD	$r + 2m > n$
PID	$3m > n$

4. シミュレーション

以下のような 2-Link Manipulator^[3] について考える．

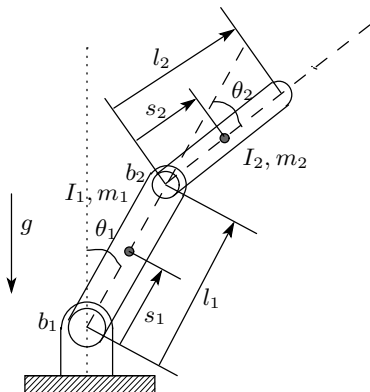


Fig.1: 2-Link Manipulator

摩擦とその他の外乱がないと仮定すると, 一般に 2-Link 構造のロボットマニピュレータのダイナミクスは 2 階の非線形微分方程式で表現される．

$$\{J_0 + R(q)\}\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{R}(q)\dot{q} + S(q, \dot{q})\dot{q} + B_0\dot{q} - g(q) = Dv \quad (19)$$

この方程式を原点周りで線形化すると, 線形化システムは 4 次元 2 入力 2 出力となる．

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (20)$$

$$\text{where } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.65 & -0.35 & -0.42 & 1.59 \\ -1.05 & 2.77 & 1.59 & -10.83 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.08 & -0.32 \\ -0.32 & 2.17 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

すなわち PD, PID 制御で任意極配置が可能である．

最適レギュレータの理論を用いて, 最適状態フィードバック則を求め, それによって最適極を計算する．

$$s = -11.32, -0.33, -0.63, -0.79, -1.00, -0.98$$

PID 制御則 (3) による閉ループ系の極を, この最適極に極配置する K_I, K_P, K_D を計算する．

$$K_I = \begin{bmatrix} -37.02 & -381.28 \\ -4.93 & -51.42 \end{bmatrix}, \quad K_P = \begin{bmatrix} -37.02 & -866.19 \\ -4.93 & -115.11 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 7.47 & -482.87 \\ 2.33 & -69.21 \end{bmatrix}$$

この PID パラメータにより, (19) を制御したときの応答を示す．

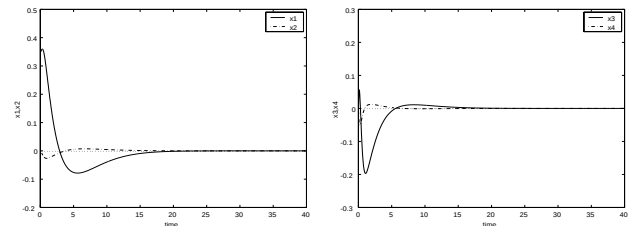


Fig.2: 2-Link Manipulator の PID 制御

目標値 $y_{d1} = 0, y_{d2} = 0$
初期値 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (\frac{20}{180}\pi, 0, 0, 0)$

5. おわりに

本論文では任意極配置法に基づく新たな PID コントローラ設計法を示した．シミュレーション結果より, 良好な制御成績で漸近安定化されており, 本論文の手法は極めて有効であるといえる．

任意極配置ができないときは, 擬似極配置法^[2]を用いる．これは極配置のためのある制約を満たした上で, できるだけ所望の極の近くに極配置することによりコントローラを設計する．

6. 参考文献

- [1] A.T.Alexandridis : Design of output feedback controllers and output observers, IEE Proceedings, Control Theory Appl., Vol.146, No.1, 108/112 (1999)
- [2] 志水, 本城, 山口 : 擬似極配置法による PID コントローラ調整法, 計測自動制御学会論文集, Vol.38, No.8, 686/693 (2002)
- [3] 有本 : 新版 ロボットの力学と制御, 朝倉書店 (2002)