

# カオスを用いた2軌道型大域的最適化

80123141 深堀 将吾 指導教員 志水 清孝

## 1. 概要

本論文では多峰性関数の無制約大域的最適化問題を解く大域的最適化アルゴリズムを提案する。さまざまな大域的最適化手法の中でもカオスの最適化に着目し、関数曲面上を大域的に巡回する特性を持つカオス軌道を用いた大域的最適化手法をアルゴリズム1として提案し、数値例を用いたシミュレーションを行いその有効性について証明する。また従来はあまり使われてこなかった高次の導関数にも着目し、関数  $F(x(t))$  の三階の時間微分を利用した大域的最適化アルゴリズムをアルゴリズム2として提案し、数値例を用いたシミュレーションを行いその有効性について証明する。

## 2. 慣性項付き最急降下法

局所的最適化問題の解法である最急降下法は以下のように示される。

$$\dot{x}(t) = -\nabla F(x(t)) \quad (1)$$

これに慣性項  $m\ddot{x}(t)$  を付加したものが慣性項付き最急降下法である。

$$m\ddot{x}(t) + \mu\dot{x}(t) = -\nabla F(x(t)) \quad (2)$$

慣性項付き最急降下法は  $m$  を質量、 $x$  を位置ベクトル、 $\dot{x}$  を速度ベクトル、 $\ddot{x}$  を加速度ベクトル、 $\mu$  を粘性パラメータとみればニュートンの力学的運動方程式とみなすことができる。

## 3. アルゴリズム1

カオスを用いた2軌道型大域的最適化アルゴリズムをアルゴリズム1として提案する。アルゴリズム1は探索軌道と最適化軌道の2つの軌道から成り立つものとする。それぞれの軌道の役割は、探索軌道が大域的最適解を広範囲にわたって探索する役割を持つ軌道とし、最適化軌道が近くの局所最適解に収束する役割を持つ軌道とする。この2つの軌道の間に関連関係を持たせることにより、探索軌道の発見した大域的最適解のベイシンに最適化軌道を吸引することで大域的最適解に最適化軌道が収束する。

### 3.1 最適化軌道 $x_A(t)$ の定式化

最適化軌道  $x_A(t)$  は最急降下法をベースとし、探索軌道  $x_B(t)$  の関数値  $F(x_B)$  と自身の関数値  $F(x_A)$  を比較して、 $F(x_A) > F(x_B)$  の時のみ探索軌道  $x_B(t)$  の方向に力を発生する相関関数を付加した軌道であるとする。最適化軌道  $x_A(t)$  の式は以下のように表される。

$$\dot{x}_A(t) = -\nabla F(x_A(t)) + \frac{k}{2}(1 + \tanh(F(x_A(t)) - F(x_B(t))))(x_B(t) - x_A(t)) \quad (3)$$

式(3)の右辺第一項が最急降下法、第二項が相関関数の部分になる。

### 3.2 探索軌道 $x_B(t)$ の定式化

探索軌道  $x_B(t)$  は慣性項付き最急降下法をベースとし摩擦抵抗にあたる  $\mu$  を負の範囲で時間変化させることによって系全体に与えられるエネルギーを上昇させることで初期値への依存性を少なくし、慣性項付き最急降下法のもつ特性を活かして関数局面上を大域的に動く軌道とする。これによりより良い局所最適解のベイシンを探索する。

時間変化する  $\mu$  として式(4)で与えられる  $\mu(t)$  を定義する。

$$\mu(t) = a(-b + \cos(\omega_a t)) \exp(-\omega_b t) \quad (4)$$

$a$  は  $\mu(t)$  の振幅を決定するパラメータとする。

$b$  はエネルギーの拡大率を決定するパラメータとする。

$\omega_a$  は  $\mu(t)$  の周期を表すパラメータとする。

$\omega_b$  は  $\mu(t)$  の時間減少率を決定するパラメータとする。

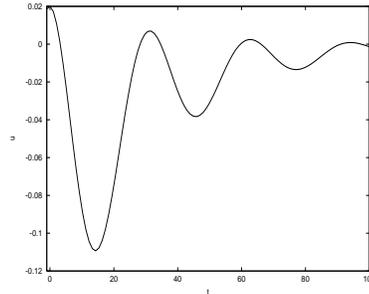


Fig.1:  $\mu(t)$  グラフ

式(4)で示される  $\mu(t)$  を慣性項付き最急降下法に代入した探索軌道  $x_B(t)$  は以下ようになる。

$$m\ddot{x}_B(t) + \mu(t)\dot{x}_B(t) = -\nabla F(x_B(t)) \quad (5a)$$

$$\mu(t) = a(-b + \cos(\omega_a t)) \exp(-\omega_b t) \quad (5b)$$

## 4. アルゴリズム2

高次の導関数を用いた動的コントローラを利用した2軌道型大域的最適化アルゴリズムをアルゴリズム2として提案する。アルゴリズム2は探索軌道と最適化軌道の2つの軌道から成り立つものとする。それぞれの軌道の役割は、探索軌道が大域的最適解を広範囲にわたって探索する役割を持つ軌道とし、最適化軌道が近くの局所最適解に収束する役割を持つ軌道とする。この2つの軌道の間に関連関係を持たせることにより、探索軌道の発見した大域的最適解のベイシンに最適化軌道を吸引することで大域的最適解に最適化軌道が収束する。

### 4.1 最適化軌道 $x_A(t)$ の定式化

アルゴリズム1と同様に最適化軌道  $x_A(t)$  は最急降下法をベースとし、探索軌道  $x_B(t)$  との間に関連関係を持たせた軌道とする。これを定式化すると以下ようになる。

$$\dot{x}_A(t) = -\nabla F(x_A(t)) + \frac{k}{2}(1 + \tanh(F(x_A(t)) - F(x_B(t))))(x_B(t) - x_A(t)) \quad (6)$$

### 4.2 探索軌道 $x_B(t)$ の定式化

探索軌道  $x_B(t)$  は慣性項付き最急降下法をベースとし三次の導関数を用いた動的コントローラを付加することで、系全体に与えられるエネルギーの上昇を図ると共に局所最適解間のエネルギー障壁を超えやすくする働きを探索軌道  $x_B(t)$  に追加する。

慣性項付き最急降下法を制御問題とみなし定式化すると

$$m\ddot{x}_B(t) + \mu\dot{x}_B(t) = -\nabla_{x_B} F(x_B(t)) + \beta u(t) \quad (7)$$

となる。ここで式(7)を  $x_B(t) = z_1(t)$ ,  $\dot{x}_B(t) = z_2(t)$  として拡大変数表示を行ない、DGDC<sup>[5]</sup> の理論を適用すると

$$f_1(z_1(t), z_2(t), u(t)) = z_2 \quad (8a)$$

$$f_2(z_1(t), z_2(t), u(t)) = \frac{1}{m}(-\mu z_2(t) - \nabla_{z_1} F(z_1(t)) + \beta u(t)) \quad (8b)$$

における。動的コントローラ  $u(t)$  として三次の導関数を利用して慣性を増加させる方向に働くコントローラを考えるので式 (8a),(8b) のもとで  $-\frac{d^3 F(z_1(t))}{dt^3}$  を減少する次のような減少化問題を考える。

$$\text{decrease } \frac{d^3 F(z_1(t))}{dt^3} + \frac{1}{2}\gamma u(t)^T u(t) \quad (9a)$$

$$\text{subject to } \dot{z}_1(t) = f_1(z_1(t), z_2(t), u(t)), z_1(0) = z_{10} \quad (9b)$$

$$\dot{z}_2(t) = f_2(z_1(t), z_2(t), u(t)), z_2(0) = z_{20} \quad (9c)$$

記述簡単化のため次のようにおく。

$$\begin{aligned} \phi^t[u] &\triangleq \hat{F}(z_1(t), z_2(t), u(t)) \\ &\triangleq -\frac{d^3 F(z_1(t))}{dt^3} + \frac{1}{2}\gamma u(t)^T u(t) \\ &= -\frac{3}{m}z_2(t)^T \nabla_{z_1} F(z_1(t))(-\mu z_2(t) - \nabla_{z_1} F(z_1(t)) + \beta u(t)) \\ &\quad - z_2(t)^T \nabla_{z_1 z_1} F(z_1(t)) \cdot (z_2(t) \otimes z_2(t)^T) \\ &\quad - \frac{1}{m^2} \nabla_{z_1} F(z_1(t))^T (\mu^2 z_2(t) + \mu \nabla_{z_1} F(z_1(t)) - \mu \beta u(t)) \\ &\quad - m \nabla_{z_1} F(z_1(t)) z_2(t) + m \beta u(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma u(t)^T u(t) \end{aligned} \quad (10a)$$

$$f_1(z_1(t), z_2(t), u(t)) \triangleq \dot{z}_1(t) \quad (10b)$$

$$f_2(z_1(t), z_2(t), u(t)) \triangleq \dot{z}_2(t) \quad (10c)$$

ここで DGDC の理論を応用すると、 $\phi^t[u]$  の  $u(t)$  に関する勾配関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) &= \nabla u f_1(z_1(t), z_2(t), u(t))^T \nabla_{z_1} \hat{F}(z_1(t), z_2(t), u(t)) \\ &\quad + \nabla u f_2(z_1(t), z_2(t), u(t))^T \nabla_{z_2} \hat{F}(z_1(t), z_2(t), u(t)) \\ &\quad + \nabla u \hat{F}(z_1(t), z_2(t), u(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。 $\nabla u f_1(z_1(t), z_2(t), u(t)) = 0$ , 及び  $\nabla u f_2(z_1(t), z_2(t), u(t)) = \frac{1}{m}I$  を式 (11) に代入すると,

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) &= \frac{1}{m} \nabla_{z_2} \hat{F}(z_1(t), z_2(t), u(t)) + \nabla u \hat{F}(z_1(t), z_2(t), u(t)) \\ &= \frac{1}{m} (-\nabla_{z_1} F(z_1(t)) \cdot (z_2(t) \otimes z_2(t)^T) \\ &\quad - z_2(t)^T \nabla_{z_1 z_1} F(z_1(t)) \cdot \nabla_{z_2} (z_2(t) \otimes z_2(t)^T) \\ &\quad + \nabla_{z_1} F(z_1(t))^T (3(2\mu m - \beta) z_2(t) \\ &\quad + 4 \nabla_{z_1} F(z_1(t)) - 3\beta u(t)) \\ &\quad + \frac{\mu(m\beta - \mu)}{m^2} \nabla_{z_1} F(z_1(t)) + \gamma u(t) \end{aligned} \quad (12)$$

動的コントローラの減少化を最急降下法にもとずいて行うと  $\dot{u}(t) = -\nabla \phi^t[u](t)$  となるので最終的な探索軌道  $x_B(t)$  は以下のようなになる。

$$m\dot{x}_B(t) + \mu x_B(t) = -\nabla F(x_B(t)) + \beta u(t) \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{1}{m} (\nabla_{x_B} F(x_B(t)) \cdot (\dot{x}_B(t) \otimes \dot{x}_B(t)^T) \\ &\quad + \dot{x}_B(t)^T \nabla_{x_B x_B} F(x_B(t)) \cdot \nabla_{x_B} (\dot{x}_B(t) \otimes \dot{x}_B(t)^T) \\ &\quad - \nabla_{x_B} F(x_B(t))^T (3(2\mu m - \beta) \dot{x}_B(t) + 4 \nabla_{x_B} F(x_B(t)) - 3\beta u(t)) \\ &\quad - \frac{\mu(m\beta - \mu)}{m^2} \nabla_{x_B} F(x_B(t)) - \gamma u(t) \end{aligned} \quad (13b)$$

## 5. シミュレーション

Griwank Model

$$\min_x F(x(t)) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{200} + 1 - \cos(x_1) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \quad (14)$$

この関数をに表すと Fig.2 のようになる。局所最適解は無数にあり、大域的最適解の理論値は  $x(t)=(0,0)$  である。

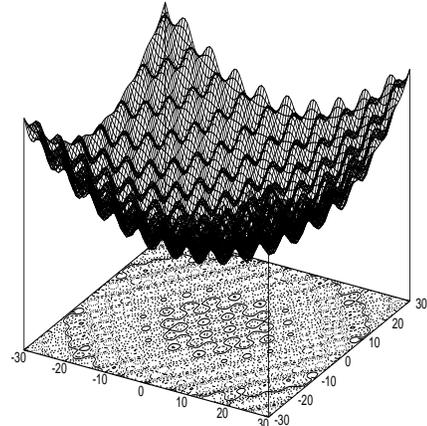


Fig.2: Griewank Model のグラフと等高線

Griewank Model に対する各アルゴリズムのシミュレーション結果を以下に示す。

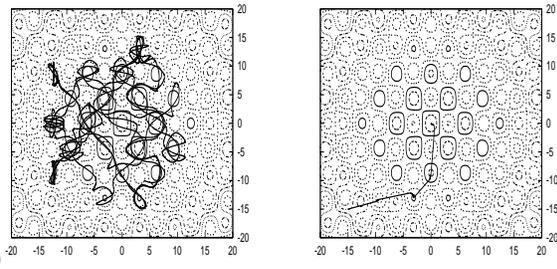


Fig.3: アルゴリズム 1 のシミュレーション結果

初期値  $(x_{A10}, x_{A20}, x_{B10}, x_{B20}) = (-15, -15, 4, -10)$

アルゴリズム 1 のパラメータ

$$a = 1/10, m = 0.8, \omega_c = 1, \omega_d = 1/30, k = 10, dt = 0.01, n = 30000$$

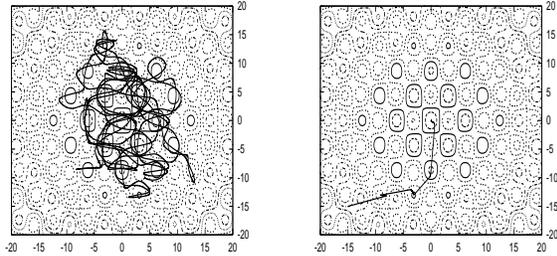


Fig.4: アルゴリズム 2 のシミュレーション結果

初期値  $(x_{A10}, x_{A20}, x_{B10}, x_{B20}, u_{10}, u_{20}) = (-15, -15, 4, -10, 0, 0)$

アルゴリズム 2 のパラメータ

$$k = 15, m = 0.6, \gamma = 100, \mu = 0.01, \beta = 1, dt = 0.01, n = 50000$$

アルゴリズム 1,2 のパラメータを適切に調節した時に初期点をランダムに選択した場合、大域的最適解への収束確率はそれぞれ 59.1%,99.9% となる。

## 6. 結論

アルゴリズム 1,2 とともに大域的最適化に効果があったことがシミュレーション結果により実証された。特に高次の導関数を用いた大域的最適化アルゴリズムは良好なシミュレーション結果となった。

## 7. 参考文献

- [S1]K.Shimizu,S.Ito,S.Suzuki,"Tracking Control of General Nonlinear System by Direct Gradient Descent Method",IFAC Symp.on Nonlinear Control System Design 98,Vol.1of3,185/190,1998.  
[S2]K.Shimizu,K.Suzaki,"A new Global Optiimization Algorithm via Dnamic Control",IEEE International Conference,SMC,Oct,2002