2002-08-5

LPV システムの適応モデル予測制御

80122448 田熊 元　　指導教員 佐野 昭

1 研究の背景と目的

システムを制御する際，コントローラは評価関数として表された何らかの設計仕様を満足するように設計される．receding horizon 制御 (モデル予測制御) は有限 horizon の 2 次形式評価関数を最小にする最適制御である．これは線形時変系に対して提案され，現在，動特性に不確かさが含まれる系や非線形系に拡張されているが，動特性が未知な系に対する適応的な設計法は存在しない．一方，LPV(Linear Parameter Varying) システムは広い動作領域を持つ系のモデルリング手法として知られおり，化学プロセスや航空機制御に応用されている．しかし，前提として動特性の変化を表すスケジューリングパラメータが各時刻で入手できるとしており，この条件が LPV システムのモデリングと制御を難しくしている．そこで，本研究では評価関数として有限 horizon の 2 次形式評価関数を考え，未知で，各時刻で入手不可能なスケジューリングパラメータを含む polytipic LPV システムに対する適応 receding horizon 制御の設計手法を提案する．

2 有限 horizon ロバスト receding horizon 制御

まず，有限 horizon ロバスト receding horizon 制御を定式化し，その安定性を証明する．

制御対象は polytopic LPV システムである．

$$x(k+1) = A(\alpha)\,x(k) + b\,u(k),\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R} \tag{1}$$

ここで $A(\alpha) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j$, $[A(\alpha),\, b] \in \Omega$ で Ω は端点 $[A_1, b], \cdots, [A_r, b]$ から成る polytope であり，$\alpha \triangleq [\alpha_1, \cdots, \alpha_r]^T \in \mathbb{R}^r$ は時不変なスケジューングパラメータで polytope $\Psi : \{\alpha \mid \sum_{j=1}^{r} \alpha_j = 1,\ 0 \le \alpha_j \le 1\}$ 内の値をとる．今，状態 $x(k)$ が全て入手可能なとき，(1) 式に対し，予測 horizon N の 2 次形式評価関数

$$J(k) = \sum_{i=0}^{N} [x(k+i|k)^T Q\, x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R\, u(k+i|k)],\ Q > 0,\ R > 0 \tag{2}$$

を考える．ここで $x(k+i|k)$ は時刻 k で予測する時刻 $k+i$ の状態であり，$x(k|k) = x(k)$ である．この評価関数をフィードバック制御則

$$\begin{aligned} u(k+i|k) &= K_k(i,\, \alpha)\, x(k+i|k) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \alpha_j K_{kj}(i)\, x(k+i|k) \end{aligned} \tag{3}$$

によって最小化する問題を考える．

次にフィードバックゲイン $K_{kj}(i)$ を求めるため，評価関数の最小化問題を定式化する．まず，(4) 式を満たす $S_k(i) > 0$ を用いて $V(x(k+i|k))$ を定義する．

$$V(x(k+i|k)) \triangleq x(k+i|k)^T S_k(i)\, x(k+i|k),\ S_k(i) > 0$$

$$\begin{aligned} &V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k)) \le \\ &-[x(k+i|k)^T Q\, x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R\, u(k+i|k)] \end{aligned} \tag{4}$$

(4) 式を $i = 0$ から $i = N-1$ まで足し，終端制約として $x(k+N|k) = 0$ を課すと $J(k)$ の上界として

$$J(k) \le V(x(k|k)) = x(k|k)^T S_k(0)\, x(k|k) \tag{5}$$

が得られる．$J(k)$ の最小化は $J(k)$ の上界 γ の最小化と等価なので (4), (5) 式を LMI として定式化すると，有限 horizon のロバスト receding horizon 制御問題は次のような問題に帰着する．

[問題 1]

minimize γ

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & X_k(0) \end{bmatrix} > 0 \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} X_k(i) & F_j(i)^T & X_k(i) Q^{\frac{1}{2}} & Y_{kj}(i)^T R^{\frac{1}{2}} \\ F_j(i) & X_k(i+1) & 0 & 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} X_k(i) & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y_{kj}(i) & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \ge 0 \tag{7}$$

$$F_j(i) = A_j X_k(i) + b\, Y_{kj}(i)$$

$$X_k(i) = \gamma S_k(i)^{-1}, \quad i = 0, \cdots, N-1$$

$$Y_{kj}(i) = K_{kj}(i) X_k(i), \quad i = 0, \cdots, N,\ j = 1, \cdots, r$$

各時刻で**問題 1** を解くことで $K_{kj}(i)$ が得られる．ここで (6) 式が評価関数の最小化に関する制約である．(7) 式は polytope Ω の端点における LMI であり，α に依存しないことに注意する．この制約式が各端点モデルの安定化に関する制約である．

有限 horizon ロバスト receding horizon 制御の安定性に関して次の定理が導出できる．

[定理 1]

各時刻で**問題 1** が可解だとする．このとき，$V(x(k|k))$ がリアプノフ関数であることを示すことでシステム (1) 式と制御則 (3) 式から成る閉ループ系は全ての $\alpha \in \Psi$ に対して安定となる．

3 適応 receding horizon 制御

3.1 状態が全て入手可能な場合

問題設定

対象は polytopic LPV システム (1) 式である．$\alpha \in \Psi$ は時不変で未知なパラメータと仮定する．目的は (1) 式に対し，予測 horizon N の 2 次形式評価関数 (2) 式を考え，これをフィードバック制御則

$$\begin{aligned} u(k+i|k) &= K_k(i,\, \hat{\alpha}(k+i))\, x(k+i|k) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \hat{\alpha}_j(k+i) K_{kj}(i)\, x(k+i|k) \end{aligned} \tag{8}$$

によって最小化することである．ここで $\hat{\alpha}(k)$ は α の推定値である．

また，前節と同様に $V(x(k+i|k))$ を定義すると，適応 receding horizon 制御の最小化問題として**問題 1** が定式化できる．

安定性の証明

問題 1 が可解のとき，閉ループ系の方程式は次のようになる．

$$x(k+1) = F(\hat{\alpha}(k+1))\,x(k) - \textstyle\sum_{j=1}^{r} \tilde{\alpha}_j(k+1)\,\eta_j(k) \quad (9)$$

$F(\hat{\alpha}(k)) = \sum_{j=1}^{r} \hat{\alpha}_j(k)[A_j + b\,K_{kj}(0)]$, $\tilde{\alpha}_j(k) = \hat{\alpha}_j(k) - \alpha_j$, $\eta_j(k) = A_j\,x(k)$ である．誤差方程式を求めると，

$$e_x(k) = \hat{x}(k) - x(k) = \textstyle\sum_{j=1}^{r} \tilde{\alpha}_j(k)\,\eta_j(k-1)$$
$$\hat{x}(k+1) = A(\hat{\alpha}(k+1))\,x(k) + b\,K_k(0,\,\hat{\alpha}(k+1))\,x(k)$$

となるので，パラメータ調整則として

$$\tilde{\alpha}_j(k+1) = \tilde{\alpha}_j(k) - \varepsilon(k)\,\eta_j(k-1)^T e_x(k) \qquad (10)$$
$$\varepsilon(k) = \beta/(\textstyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_{\max,j}),\ (0 < \beta < 2)$$

を考える．$\lambda_{\max,j}$ は行列 $\eta_j(k-1)\,\eta_j(k-1)^T$ の最大固有値である．(10) 式の実装では射影アルゴリズムを用い，$\hat{\alpha}(k) \in \Psi, \forall k$ としながらパラメータ調整する．

ここで (9) 式中の行列 $F(\hat{\alpha}(k))$ は，**定理 1** より $\hat{\alpha}(k) \in \Psi$ ならば時刻 k によらず安定であるので，適応 receding horizon 制御の安定性が次の定理で与えられる．

[定理 2]
各時刻で**問題 1** が可解だとする．このとき，

$$W(k) = \xi\,[x(k-1)^T P\,x(k-1)] + \delta\,\textstyle\sum_{j=1}^{r} \tilde{\alpha}_j(k)^T \tilde{\alpha}_j(k),\ \xi,\,\delta > 0 \quad (11)$$

がリアプノフ関数であることを示すことでシステム (1) 式と制御則 (8) 式，パラメータ調整則 (10) から成る閉ループ系の漸近安定性が保証される．

3.2 状態が入手不可能な場合

問題設定

対象は polytopic LPV システム (1) 式および

$$y(k) = c^T x(k),\ y \in \mathbb{R} \qquad (12)$$

である．$\alpha \in \Psi$ は時不変な未知パラメータと仮定する．目的はシステム (1)，(12) 式に対し，評価関数 (2) 式を考え，これをフィードバック制御則

$$\begin{aligned} u(k+i|k) &= \hat{K}_k(i,\,\hat{\alpha}(k+i))\,\hat{x}(k+i|k) + u_c(k+i|k) \quad (13)\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{r} \hat{\alpha}_j(k+i)\hat{K}_{kj}(i)\,\hat{x}(k+i|k) + u_c(k+i|k) \end{aligned}$$

によって最小化することである．ここで $u_c(k)$ は有界な外部入力，$\hat{x}(k)$ は $x(k)$ の推定値であり，適応オブザーバ

$$\hat{x}(k+1) = A_s\,\hat{x}(k) + g(\hat{\alpha}(k+1))\,y(k) + b\,u(k) \quad (14)$$
$$\hat{y}(k) = c^T \hat{x}(k) \qquad (15)$$
$$\hat{\alpha}(k) = \hat{\alpha}(k-1) - \tfrac{\beta\,\phi(k-1)\,e_y(k-1)}{\phi(k-1)^T \phi(k-1)},\ (0 < \beta < 2) \quad (16)$$

を用いて生成する．A_s は漸近安定行列，$g(\hat{\alpha}(k)) = \sum_{j=1}^{r} \hat{\alpha}_j(k)\,g_j$，$\phi(k)$ は適応オブザーバの回帰ベクトルである．また，$\hat{K}_{kj}(i)$ は次の最小化問題を解いて求める．

[問題 2] minimize γ

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{x}(k|k)^T \\ \hat{x}(k|k) & X_k(0) \end{bmatrix} > 0,\ (7)\ \text{式}$$

安定性の証明

状態の推定誤差 $e_x(k) = \hat{x}(k) - x(k)$ と $\zeta_j(k) = g_j\,y(k)$ を定義すると，閉ループ系の方程式は

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e_x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}(\hat{\alpha}(k+1)) & b\,\hat{K}_k(0,\hat{\alpha}(k+1)) \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e_x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \sum_{j=1}^{r} \tilde{\alpha}_j(k+1)\,\zeta_j(k) + \begin{bmatrix} b\,u_c(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

となる．ここで $\hat{F}(\hat{\alpha}(k)) = \sum_{j=1}^{r} \hat{\alpha}_j(k)[A_j + b\,\hat{K}_{kj}(0)]$ は，**定理 1** より $\hat{\alpha}(k) \in \Psi$ ならば時刻 k によらず安定である．よって次の定理が導出できる．

[定理 3]
各時刻で**問題 2** が可解だとする．また，外部入力 $u_c(k)$ は $\phi(k)$ が sufficient rich となるように選べるとする．このとき，$k \to \infty$ で $\tilde{\alpha}(k) \to 0$ となるので，システム (1)，(12) 式，制御則 (13) 式，適応オブザーバ (14)-(16) 式から成る閉ループ系は漸近安定となる．また，漸近的に評価関数 (2) 式の最小化が達成される．

4 数値例

2 次で端点数 5 の polytopic LPV システムに対する，提案法とロバスト receding horizon 制御の結果を比較した．端点モデルと真の α の値は次のように与えられる．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.12 & -0.34 \\ 3.01 & 0.78 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -2.25 & -1.73 \\ 2.27 & 0.03 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1.39 & 1.46 \\ -1.11 & 0.64 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} -1.29 & 0.63 \\ -2.01 & -0.85 \end{bmatrix},\ A_5 = \begin{bmatrix} 3.71 & -1.19 \\ 0.98 & 1.52 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2.51 \\ 0.26 \end{bmatrix}$$
$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.09 & 0.05 & 0.17 & 0.39 \end{bmatrix}^T,\ \text{予測 horizon } N = 6$$

目的はシステムの状態 $x(k) = [x_1(k),\,x_2(k)]^T$ を $[0,\,0]^T$ へとレギュレーションすることである．

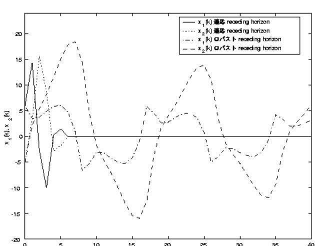

図 1: 状態の応答の比較

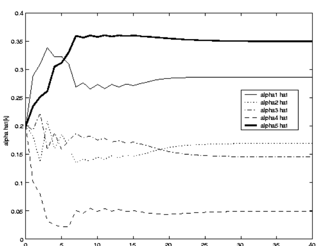

図 2: α の推定結果

5 結論

スケジューリングパラメータが未知で入手不可能な polytopic LPV システムに対する適応 receding horizon 制御の設計法を提案し，その漸近安定性を証明した．

参考文献 [1] M. V. Kothare, V. Balakrishnan, M. Morari. Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities, Automatica, 32, 1361-1379, 1996