2002-06-01

三成分からなる反応拡散方程式における空間的パターン

80121562 柿沼　翼　　　　指導教員 国松　昇

1　はじめに

英国の数学者 Turing は１９５２年の論文で, 細胞分化や形態の発生や成長はどのように説明できるかという問題に対して, 生物における形態形成は化学物質の反応と拡散という２つ機構によって起こりえるという説を主張し, 拡散という空間的に一様でない状態を一様な状態に ”ならす ”と一般的に思われている現象が, 逆に空間的非一様性を促進させることがあるということを示した. そして Turing の論文以来, 物理学, 化学, 生物学など様々な分野で反応拡散モデルが用いられてきた. しかしそのほとんどのモデルは２種類の因子の相互作用を表す数理モデルであり, 生態系における食物連鎖モデルにおいては多種の捕食・被食関係によって成り立っている場合がほとんどである.

このような現状をふまえて, 我々は数理生態学におけるモデルをベースにして３種間の捕食・被食関係を反応拡散モデルであらわし, そのモデルに対し, 平衡解の安定性を調べることにより空間的に不均一な状態ーパターンーの発生の可能性とその条件を調べ, その結果にもとづいて計算機によるシミュレーションを行う.

2　３種食物連鎖モデル

今, ３つの種 $R(t,x), C(t,x), P(t,x)$ の個体数密度について考えよう. 以後 $R = R(t,x), C = C(t,x), P = P(t,x)$ とする. それぞれの種は R が自己増殖する資源,C が R を餌とする中間捕食者,P は C のみを捕食する最高捕食者を想定している.R はロジスティック的な増殖をするが C, P は餌がいなければそれぞれ死亡率 $\alpha_c, \alpha_p p$ によって減少していくのみである. つまり C, P はそれぞれの餌を捕食することによってのみ繁殖することができるとすると,R, C, P についての食物連鎖モデルは以下のような反応拡散方程式で表される.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial t} &= D_R \Delta R + R(1-R) - \alpha_c \beta_c \frac{RC}{R+R_0} \\
\frac{\partial C}{\partial t} &= D_C \Delta C - \alpha_c C + \alpha_c \beta_c \frac{RC}{R+R_0} - \alpha_p \beta_p \frac{CP}{C+C_0} \\
\frac{\partial P}{\partial t} &= -\alpha_p P^2 + \alpha_p \beta_p \frac{CP}{C+C_0} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

この方程式は唯一の正の空間一様な平衡解 (R^*, C^*, P^*) を持ち, 空間一様な系に対しては安定であるとする. この平衡解が適当な拡散係数をとった時不安定化するならば, 空間的なパターンが発生することが期待できる. そこで, 線形化安定解析を用いて揺らぎに対する安定性について調べる.

今, 揺らぎを

$$
\begin{aligned}
\tilde{r} &= r_0 \exp(\lambda_k t + ikx) \\
\tilde{c} &= c_0 \exp(\lambda_k t + ikx) \\
\tilde{p} &= p_0 \exp(\lambda_k t + ikx)
\end{aligned}
$$

とおく.k は空間における波数である. これを (1) 式を平衡解の近傍で線形化した方程式に代入すると,λ_k に対する方程式が得られる. もし λ_k の解の中に１つでも実部が正のものがあれば平衡解は不安定であるということができる. そこで我々は Hurwitz の安定判別法を用いて平衡解が不安定化する条件を求める. 条件を満たす適当な拡散係数を選んだとき, ある限定された範囲の k のみが不安定化されるという結果が得られている.

3　結果

下図は得られた条件をもとに数値シミュレーションを行った結果の一例である. シミュレーションは拡散係数のみを変化させ, その他のパラメータは固定している.

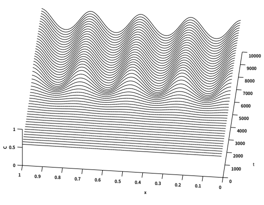

図 1: $D_R = 3.0\times10^{-2}$ $D_C = 8.0\times10^{-6}$

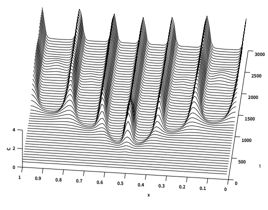

図 2: $D_R = 3.0\times10^{-2}$ $D_C = 5.0\times10^{-7}$

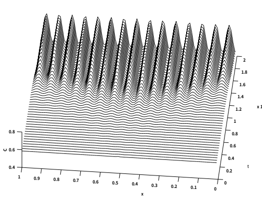

図 3: $D_R = 2.0\times10^{-3}$ $D_C = 6.0\times10^{-7}$

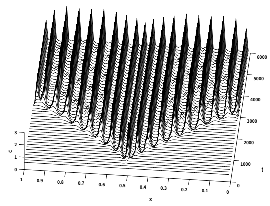

図 4: $D_R = 2.0\times10^{-3}$ $D_C = 1.0\times10^{-7}$

4　結論

我々は非線型の反応拡散方程式であらわされる３種個体数密度モデルにおいて, パターン形成が起こる可能性を示し, それを数値シミュレーションによって実証した. しかし, 数値シミュレーションでは拡散係数の取り方によって発生するパターンに違いがあるということがわかった. １つ目は, 時間が経っても静止しているパターンが発生する場合と, 時間とともにわずかに変化する動的なパターンが発生する場合があるという違いである. これは, 平衡解の不安定性の違いが原因であると考えられる. ２つ目は, 拡散係数の大きさによって不安定化して振幅が増大する波数が異なるということである. 定めた拡散係数の値によって不安定化する波数が異なると示している.