

分数階積分システムに対する適応制御システムの一構成法

80123496 武藤 恒司

指導教員 大森 浩充

1 はじめに

分数階積分システムとは、分数階の微積分により表現されるシステムのことである。分数階積分システムは、粘弾性体の動特性を少ないパラメータで適切に表現できることが知られており、熱システム・電磁気システム・電気化学システムなどの分布定数系を同定する際のモデルとしても用いられている。一方、環境や動作条件により変動する制御対象の動特性の不確かさを補う制御手法として適応制御が存在する。分数階積分システムに対し適応制御系を構成する際に分数階微積分を近似計算するとき生じる近似誤差が問題となる。

そこで、本論文では分数階微積分に対してリアプノフ直接法を用いて近似誤差が生じても安定性を保証する適応制御系の構成法、制御器に分数階微積分を使用しない適応制御系の構成法を提案する。さらに、本手法の有効性を数値例によって示す。

2 分数階積分システムに対する適応制御系構成法

2.1 目的

本節では、制御対象として次の $\{n, \alpha\}$ 次元 (n は状態ベクトルの次元, $\alpha \in (0, 1)$ は状態方程式の微分階数) SISO システムを考える。

$$\begin{cases} D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{a}y(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 D^α は α 階微分演算子、 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{a} = [-a_{n-1}, \dots, -a_0]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{b} = [b_{n-1}, \dots, b_0]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}, [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n] = \mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

であり、 $\mathbf{x}(t), u(t), y(t)$ はそれぞれ制御対象の状態、入力、出力である。また、 n, α は既知、式 (1) のシステムは最小位相系、相対次数は α 、 $b_{n-1} > 0$ 、 \mathbf{a}, \mathbf{b} は未知であると仮定する。このとき α 階微分可能な既知信号 $y_M(t)$ に出力 $y(t)$ を漸近的に追従させるような適応制御システムの構成法を示す。

2.2 出力フィードバックによる適応制御系構成法

まず、状態観測器を構成する。式 (1) において $A_0 = A - \mathbf{k}\mathbf{e}_1^T$ が安定行列 ($|\arg(\text{eig}(A_0))| > \alpha\pi/2$) となるように \mathbf{k} を選び、入出力を用いて信号 $\mathbf{f}_{y_i}(t), \mathbf{f}_{u_i}(t) \in \mathbb{R}^n$ を発生させる。

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathbf{f}_{y_n}(t) &= A_0 \mathbf{f}_{y_n}(t) + \mathbf{k}y(t) \\ D^\alpha \mathbf{f}_{y_i}(t) &= A_0 \mathbf{f}_{y_i}(t) + \mathbf{e}_{n-i}y(t) \\ D^\alpha \mathbf{f}_{u_i}(t) &= A_0 \mathbf{f}_{u_i}(t) + \mathbf{e}_{n-i}u(t), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2) を用いて $\hat{\mathbf{x}}(t), \epsilon(t) \triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ を次式で表現する。

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{y_n}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{f}_{y_i}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathbf{f}_{u_i}(t) \quad (3)$$

$$D^\alpha \epsilon(t) = A_0 \epsilon(t) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{f}_{y_i}(t), \mathbf{f}_{u_i}(t)$ は入力を作る際に必要となるが、実際には式 (2) の α 階微分演算を整数階の近似伝達関数 $L(s)$ に置きかえた $\overline{\mathbf{f}}_{y_i}(t), \overline{\mathbf{f}}_{u_i}(t)$ を入力発生に利用する。また、 $y_M(t)$ の α 階微分演算も近似により発生する。近似による誤差は次式で表現できる。

$$\begin{aligned} e_{\hat{\mathbf{x}}}(t) &\triangleq \hat{\mathbf{x}}(t) - \overline{\hat{\mathbf{x}}}(t) \triangleq [e_{\hat{x}_1}(t), \dots, e_{\hat{x}_n}(t)]^T \\ e_y(t) &\triangleq D^\alpha y_M(t) - \overline{D^\alpha y_M}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$e_{\hat{\mathbf{x}}}(t), e_y(t)$ は有界と仮定する。

$$\begin{aligned} \text{追従誤差 } e(t) &\triangleq y(t) - y_M(t) \text{ は次式で表現できる。} \\ D^\alpha e(t) &= -(c+f)e(t) + b_{n-1}(u(t) + \hat{p}(t)\phi(t)) + \epsilon_2(t) \\ &\quad + b_{n-1}(\tilde{p}(t))\phi(t) + \omega^T(t)\tilde{\theta}(t) + e_a(t) \triangleq E(t) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $c, f > 0$ は設計変数、 $p \triangleq 1/b_{n-1}$

$$\begin{aligned} \omega(t) &\triangleq [\overline{\mathbf{f}}_{y_{(2)}}^T(t) + \mathbf{e}_1^T y(t) \quad \overline{\mathbf{f}}_{u_{(2)}}^T(t)]^T, \theta \triangleq [\mathbf{a}^T \quad \mathbf{b}^T]^T \\ \phi(t) &\triangleq (c+f)e(t) + \overline{\mathbf{f}}_{y_{n,2}}^T(t) + \omega^T(t)\hat{\theta}(t) - D^\alpha y_M(t) \\ \overline{\mathbf{f}}_{y_n}(t) &\triangleq [\overline{\mathbf{f}}_{y_{n,1}}(t), \dots, \overline{\mathbf{f}}_{y_{n,n}}(t)]^T, e_a(t) \triangleq e_{\hat{x}_2}(t) - e_y(t) \\ \overline{\mathbf{f}}_{i_{(2)}}(t) &\triangleq [\overline{\mathbf{f}}_{i_{n-1,2}}(t), \dots, \overline{\mathbf{f}}_{i_{0,2}}(t)]^T, i = u, y \\ \epsilon(t) &\triangleq [\epsilon_1(t), \dots, \epsilon_n(t)]^T, \tilde{p}(t) \triangleq p - \hat{p}(t), \tilde{\theta}(t) \triangleq \theta - \hat{\theta}(t) \end{aligned}$$

ここで、式 (4), (6) をそれぞれ Diffusive Realization [1] で別表現する。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \psi_\epsilon(\xi, t) = -\xi \psi_\epsilon(\xi, t) + \sqrt{\mu_\alpha(\xi)} (A_0 \epsilon_m(t) + e_{cm}(t)) \\ \epsilon_m(t) = \int_0^\infty \sqrt{\mu_\alpha(\xi)} \psi_\epsilon(\xi, t) d\xi \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_e(\xi, t) = -\xi \psi_e(\xi, t) + \sqrt{\mu_\alpha(\xi)} (E_m(t)) \\ e_m(t) = \int_0^\infty \sqrt{\mu_\alpha(\xi)} \psi_e(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (8)$$

ただし、 $\xi \in [0, \infty)$ であり、

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(\xi) &\triangleq \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \xi^{-\alpha}, \psi_\epsilon(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha(\xi)}} \delta(\xi) \epsilon(0) \\ \psi_e(\xi, 0) &= \frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha(\xi)}} \delta(\xi) e(0) \end{aligned}$$

リアプノフ関数の候補として次式を考える、

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \psi_e^2(\xi, t) + \frac{1}{f_1} \psi_\epsilon^T(\xi, 0) P_0 \psi_\epsilon(\xi, 0) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t) + \frac{|b_{n-1}|}{2\gamma} \tilde{p}^2(t) \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、

$$\gamma > 0 \in \mathbb{R}, \Gamma > 0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$P_0, Q > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ は } P_0 A_0 + A_0^T P_0 = -Q \text{ を満たす}$$

このとき、制御入力と σ 修正法を用いたパラメータ調整則を次式とすると、

$$\begin{aligned} u(t) &= -\hat{p}(t)\phi(t) \\ \dot{\hat{p}}(t) &= \gamma \text{sgn}(b_{n-1})\phi(t)e_m(t) - \sigma_p \gamma \hat{p}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \Gamma e_m(t)\omega(t) - \Gamma \sigma \hat{\theta}(t), \sigma > 0 \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (10)$$

式 (9) の時間に関する 1 階微分は

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\int_0^\infty \xi \phi_\epsilon^2(\xi, t) + \frac{2}{f_1} \xi \phi_\epsilon^T(\xi, 0) P_0 \phi_\epsilon(\xi, 0) d\xi \\ &\quad - \frac{3}{4f} \epsilon^T(t) \epsilon(t) - c \left(e(t) - \frac{e_a(t)}{2c} \right)^2 + \frac{e_a^2(t)}{4c} \\ &\quad - \sigma_\theta \left(\|\tilde{\theta}(t)\| - \frac{1}{2} \|\theta\| \right)^2 + \frac{\sigma_\theta}{4} \|\theta\|^2 \\ &\quad - \sigma_p |b_{n-1}| \left(\|\tilde{p}(t)\| - \frac{1}{2} \|p\| \right)^2 + \frac{\sigma_p |b_{n-1}|}{4} \|p\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

となり、適応制御系が安定となり、 $e(t)$ はある領域内に収まる。主論文中では、 $x(t)$ が観測可能であるときの簡単な構成法を提案し、数理的証明、数値例による確認を行っている。

3 整数階制御器を用いた適応制御系構成法

3.1 目的

本節では、制御対象として次の SISO $\{n, \alpha\}$ 次元システムを考える。

$$y(t) = \frac{b_m B(s)}{A(s)} u(t) \quad (12)$$

ただし、 $u(t), y(t)$ はそれぞれ入力、出力であり、

$$\begin{aligned} A(s) &= s^{\alpha n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^{\alpha i}, \{n, \alpha\} \text{ 次 monic 多項式} \\ B(s) &= s^{\alpha m} + \sum_{i=0}^{m-1} b_i s^{\alpha i}, \text{ 安定多項式} \\ \text{安定多項式は } |\arg(B(s) = 0 \text{ の根})| &> \frac{\alpha \pi}{2} \text{ を満たす。} \end{aligned}$$

続いて、規範モデルを次のように設定する。

$$y_M(t) = \frac{b_M B_M(s)}{A_M(s)} r(t) \quad (13)$$

$r(t), y_M(t)$ はそれぞれ規範入力、規範出力であり、

$$\begin{aligned} A_M(s) &= s^{\alpha n_M} + \sum_{i=0}^{n_M-1} a_{Mi} s^{\alpha i}, \text{ 安定多項式} \\ B_M(s) &= s^{\alpha m_M} + \sum_{i=0}^{m_M-1} b_{Mi} s^{\alpha i} \end{aligned}$$

n は既知、 $n - m = 1, n_M - m_M \geq 1, \alpha = 1/p, p$: 既知の正の整数であると仮定する。

3.2 適応制御系構成法

恒等式を定義する。

$$C_n(s)H(s) = C_d(s)(A(s)R(s) + b_m S(s)) \quad (14)$$

$H(s)$: $\{(l+m)\alpha, 1\}$ 次 monic 安定多項式。

$S(s)$: $\{(l+m)\alpha, 1\}$ 次多項式。 $R(s)$: $\{l, \alpha\}$ 次 monic 多項式。

ただし、 $R(s)B(s)$ を $\{l+m, 1\}$ 次多項式とする。

$C_n(s)$: $\{k_{cn}, \alpha\}$ 次の monic 安定多項式。

ただし、 $C_n(s)B_M(s)$ を $\{k_{cn} + n_M, 1\}$ 次多項式とする。

$C_d(s)$: $\{k_{cd}, \alpha\}$ 次の monic 安定多項式。 $k_{cn} - k_{cd} = n - m$

ただし、 $C_d(s)A_M(s)$ を $\{(k_{cd} + n_M)\alpha, 1\}$ 次多項式とする。

$C_n(s)$ を設計したとき、 $C_n(s) = A(s)R(s) + b_m S(s)$ とする $S(s)$ が存在すると仮定する。

式 (14) を変形すると、追従誤差 $e(t) \triangleq y(t) - y_M(t)$ の別表現が次式で得られる。

$$e(t) = \frac{b_m C_d(s)}{C_n(s)} \left(u(t) - \theta^T \zeta(t) \right) \quad (15)$$

ただし、 $l+m$ が整数であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \theta &\triangleq [-b_{R(l+m-1)}, \dots, -b_{R0}, -s_{l+m}, \dots, -s_0, 1/b_m]^T \\ \zeta(t) &\triangleq \left[\frac{s^{l+m-1}}{H(s)} u(t), \dots, \frac{1}{H(s)} u(t), \right. \\ &\quad \left. \frac{s^{l+m}}{H(s)} y(t), \dots, \frac{1}{H(s)} y(t), \frac{C_n(s)}{C_d(s)} y_M(t) \right]^T \\ b_{Ri} (i = 0, 1, \dots, l+m-1) &: R(s)B(s) - H(s) \text{ の } i \text{ 次係数} \\ s_i (i = 0, 1, \dots, l+m) &: S(s) \text{ の } i \text{ 次係数} \end{aligned}$$

オンラインで調整する次の入力を考える。

$$u(t) = \hat{\theta}^T(t) \zeta(t) \quad (16)$$

仮定より誤差伝達関数は強正実であるから受動定理より、次のパラメータ調整則を得る。

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\Gamma e(t) \zeta(t), \Gamma \text{ は正定行列} \quad (17)$$

以上により、適応制御系は安定となり、追従誤差 $e(t)$ はゼロに漸近する。

4 数値例

4.1 出力フィードバックによる適応制御系

$$a = [3, -2]^T, b = [1, 0.5], \alpha = 0.5 \quad (18)$$

上記制御対象に対して、

$$k = [-10, -25], c_1 = 10, f_1 = 1, \gamma = 0.5 \quad (19)$$

$$\Gamma = \text{diag}([10, 20, 1, 1, \cdot]), \sigma = 1$$

としてシミュレーションを行った。

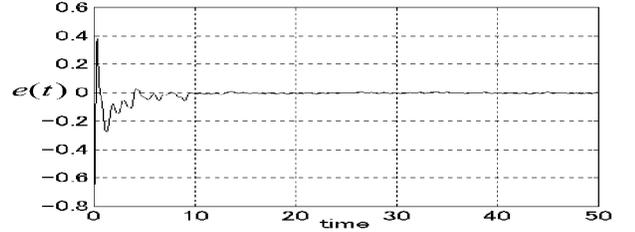


図 1: 追従誤差

4.2 整数階制御器を用いた適応制御系

$$A(s) = s^{2/3} - 3s^{1/3} + 2, B(s) = s^{1/3} + 1, b_m = 1 \quad (20)$$

上記制御対象に対して、

$$\Gamma = \text{diag}([1, 4, 4, 1]) \quad (21)$$

としてシミュレーションを行った

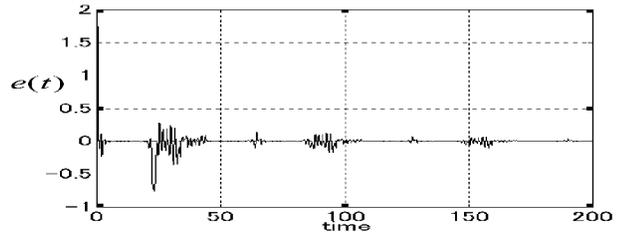


図 2: 追従誤差

5 結論

本論文では分数階積分システムに対する適応制御系の構成法の提案を行った。また、数値シミュレーションにより提案手法の有効性を示した。

参考文献

- [1] D.Heleschewitz and D.Matignon, Diffusive Realisations of Fractional Integrodifferential operators: Structural Analysis under Approximation, Proc. IFAC Conf. on System Structure and Control, vol. 2, pp.243-248, 1998.