

マルチエージェントモデルによる証券市場のモデリングと解析

80122780 中川 修平

指導教員 大森 浩充

1 はじめに

近年、マルチエージェント系システムとして人工証券市場を記述するモデルが多く提案されている。このモデルは、マイクロレベルを構成する投資家群とマクロレベルを構成する市場という大きく2種類の層によって構成され、投資家間の駆け引きなどのマイクロ間の相互作用や、投資家と市場間のループによって起こるバブル・暴落などの創発現象などを記述するのに適している。しかし、それらのモデルの多くは1種類の証券のみのモデルであり実際に応用する投資理論や実市場の安定性解析などに用いるモデルとしては不適切であったり、また、構築したモデル自体の客観的妥当性にも疑問があるモデルが少なくない。

そこで本論文では、実際に応用していくためのモデル構築として、 n 種類証券が存在するエージェントベース証券市場の記述とそのモデルのバリデーションを行う。

2 問題設定

本論文では、 h 人の投資家が、各々の富を各々の投資戦略によりリスク証券 n 種類と無リスク証券1種類に每期分散投資していく市場のモデルを設計する。各投資家は、投資比率 $\pi_t^i \triangleq [\pi_{1,t}^i, \dots, \pi_{n,t}^i]^\top$ で各証券に投資する。一方、証券市場では全投資家からの総投資に応じて、価格が決定し、その投資収益率 $\rho_{j,t}$ だけ投資家の富を増減させ、また投資家は次の投資比率決定のための情報として投資収益率を用いる。

$$\begin{aligned} \rho_{j,t} &\equiv \mu_{j,t} + \delta_{j,t} \\ \mu_{j,t} &\equiv \frac{p_{j,t} - p_{j,t-1}}{p_{j,t-1}}, \quad \delta_{j,t} \equiv \frac{d_{j,t}}{p_{j,t-1}} \end{aligned} \quad (1)$$

$\mu_{j,t}$: 証券 j の価格変動による収益率,

$\delta_{j,t}$: 証券 j の配当による収益率,

$\rho_{j,t}$: 証券 j の投資収益率, $p_{j,t}$: 証券 j の価格,

$d_{j,t}$: 証券 j への一株当たり配当金

本論文では、投資比率 π_t^i と投資収益率 $\rho_{j,t}$ の仕組みをモデリングする。

3 モデリング

3.1. 投資家のポートフォリオ最適化

各投資家の t 期の富 w_t^i は $t-1$ 期において証券、無危険資産に投資された結果、以下ようになる。

$$w_t^i = w_{t-1}^i \left[\left(1 - \sum_{j=1}^n \pi_{j,t}^i\right) (1+r) + \sum_{j=1}^n \pi_{j,t}^i (1+\rho_{j,t}) \right] \quad (2)$$

w_t^i : t 期での投資家 i の富, r : 無リスク利子率

$\pi_{j,t}^i$: t 期での投資家 i の証券 j への投資比率

3.2. 投資家の意思決定

3.2.1. 投資家の行動原理

各投資家の t 期の投資戦略は、 $t+1$ 期の効用 $U(w_{t+1}^i)$ の期待値の最大化とする。

$$\pi_t^i = \arg \max_{\pi_t^i} E_t^i[U(w_{t+1}^i)] \quad (3)$$

$U(w_t^i)$: 投資家の富 w_t^i に対する効用

3.2.2. 投資家のリスク態度

投資家はリスク回避的であるとする。

$$U(E[\cdot]) > E[U(\cdot)] \quad (4)$$

つまり、効用関数 U は、連続、2階微分可能、単調増加、凹関数と定義される。本論文では

$$U(w_t^i) \equiv \ln[w_t^i] \quad (5)$$

を用いる。

3.2.3. 投資家が想定する証券モデル

リスク証券の資産価格は連続伊藤過程に従う。

$$\frac{dp_{j,t}}{p_{j,t}} = \alpha_j dt + \sigma_j^\top dB_t, \quad \alpha_j \triangleq \mu_j + \mathbf{a}_j^\top \boldsymbol{\nu} \quad (6)$$

μ_j : 各証券の期待収益率

$\boldsymbol{\nu} \equiv [\nu_1, \dots, \nu_\ell]^\top \in \mathcal{R}^{\ell \times 1}$: ファundamentalズ

$\sigma_j \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $B_t \in \mathcal{R}^{n \times 1}$: n 次元標準ブラウン運動

無リスク証券の資産価格は、以下の微分方程式に従う。

この時、効用関数最大化問題としての π_t^i は、

$$\pi_t^i = \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\lambda} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \equiv [\rho_1 + \mathbf{a}_1^\top \boldsymbol{\nu}_1 - r, \dots, \rho_n + \mathbf{a}_n^\top \boldsymbol{\nu}_n - r]^\top \in \mathcal{R}^{n \times 1}$$

$$\mathbf{V} \equiv \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv [\sigma_1, \dots, \sigma_n]^\top \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

が最適解となる。

3.2.4. 投資家の予測

投資家 i は $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{V}$ を以下の統計量により推定する

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{t+1|t}^i = \theta_1^i + \theta_2^i \bar{\rho}_t^i + \theta_3^i \boldsymbol{\nu}_t - \mathbf{r} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{V}}_{t+1|t}^i = \theta_4^i + \theta_5^i \mathbf{C}_t^i \quad (9)$$

$$\bar{\rho}_t^i \equiv [\bar{\rho}_{1,t}^i, \dots, \bar{\rho}_{n,t}^i]^\top \in \mathcal{R}^{n \times 1}, \quad \mathbf{r} \equiv [r, \dots, r]^\top \in \mathcal{R}^{n \times 1}$$

$\bar{\rho}_{j,t}^i$: 期間 $\tau = t-L^i, \dots, t-1$ の $\rho_{j,t}$ の平均,

\mathbf{C}_t^i : 期間 $\tau = t-L^i, \dots, t-1$ の共分散行列

$\boldsymbol{\nu}_t \in \mathcal{R}^{\ell \times 1}$: ファundamentalズ

$\theta_1^i \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $\theta_2^i \in \mathcal{R}$, $\theta_3^i \in \mathcal{R}^{n \times \ell}$, $\theta_4^i \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\theta_5^i \in \mathcal{R}$:

投資家 i のパラメータ

3.3. 市場価格

3.3.1. 証券数量

各証券の市場で流通する全証券数 q_j は一定であると仮定する。

$$\sum_{i=1}^h q_{j,t}^i = q_j, \forall t \quad (10)$$

$q_{j,t}^i = \frac{\pi_{j,t}^i \cdot w_t^i}{p_{j,t}}$: 投資家 i の保有する証券数

3.3.2. 価格決定メカニズム

全投資家からの需給の均衡する価格に証券の市場価格は決定される。

3.3.3. 市場の数理モデル

本論文では、 n 種類の証券の内、1種類の証券 j_* のみは市場均衡価格で決まる人工証券市場として構築し、残る $n-1$ 種類の証券 $j \neq j_*$ は、実際の市場データを用いる。このとき、収益率 $\rho_{j_*,t}$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \rho_{j_*,t} = & r + \sum_{i=1}^H w_{t-1}^i [(1+r)(\pi_{j_*,t-1}^i - \pi_{j_*,t}^i)] \\ & - \sum_{j \neq j_*} (\rho_{j,t} - r) \pi_{j,t}^i - \delta_{j_*,t} \pi_{j_*,t-1}^i \\ & / \sum_{i=1}^H \pi_{j_*,t-1}^i w_{j_*,t-1}^i (\pi_{j_*,t}^i - 1) \quad (11) \end{aligned}$$

4 パラメータ同定

上記モデルについて、モデルパラメータのモデリングとして、実データからモデルのパラメータを同定した。同定したパラメータは、 $\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i, \theta_4^i, \theta_5^i, w_0^i, \pi_0^i$ である。

用いた実データとしては、入力として、 $\delta_{j_*,0}$: 東証一部上場企業の平均配当利回り、 r_t : 無担保コール翌日物、 $\mu_{j \neq j_*,t}$: 日本国債 10 年物・米国債 10 年物・ナスダック総合株価指数・ダウ工業株 30 種平均・S&P500・FTSE100 種株価指数・DAX 株価指数、及び ν_t : 機械受注統計・建設工事受注・景気動向指数・卸売物価指数・日経商品指数・鉱工業生産指数・設備稼働率指数・家計調査報告・貿易統計・労働力調査・完全失業率・新設住宅着工統計・市街地価格指数・短期経済観測を、出力として $\mu_{j_*,t}$: 東証株価指数 (TOPIX) の、それぞれ期間① (1990 年 1 月 4 日から 1996 年 1 月 29 日の 1500 日間) のデータを用いた。

同定アルゴリズムはモンテカルロフィルタ [1] を用いた。

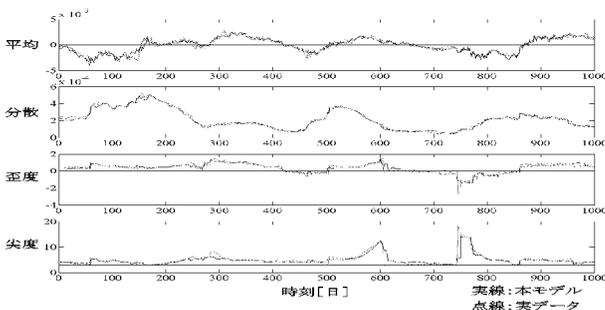


図 1: フィッティングにおける移動の統計量

5 モデルバリデーション

フィッティングで得られた値をパラメータとして用い、パラメータ導出に用いたデータと異なる期間 (期間② 1996 年 1 月 30 日から 2000 年 7 月 14 日までの 1100 日間) のデータを入力として用いて、フィッティングしたパラメータとモデルの妥当性の検証を行った。特に以下に表現される予測誤差を指標とした。

$$J_\ell \triangleq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{s_\ell(\hat{\mu}_t) - s_\ell(\mu_t)}{s_\ell(\mu_t)} \right| \times 100 [\%] \quad (12)$$

$$\mu_t \triangleq [\mu_{t-\tau+1}, \dots, \mu_t]^\top, \quad \hat{\mu}_t \triangleq [\hat{\mu}_{t-\tau+1}, \dots, \hat{\mu}_t]^\top$$

$s_\ell(\mathbf{x})$: \mathbf{x} の ℓ 次統計量

表 1: バリデーションにおけるバッチの統計量

	実データ	本モデル
平均	-8.17×10^{-5}	-9.03×10^{-5}
標準偏差	1.47×10^{-2}	1.49×10^{-2}
歪度	7.87×10^{-2}	7.02×10^{-2}
尖度	5.45	5.26

表 2: 統計量の予測誤差

	フィッティング	バリデーション
平均	9.02 %	12.73 %
標準偏差	5.28 %	5.84 %
歪度	7.15 %	8.47 %
尖度	5.17 %	5.75 %

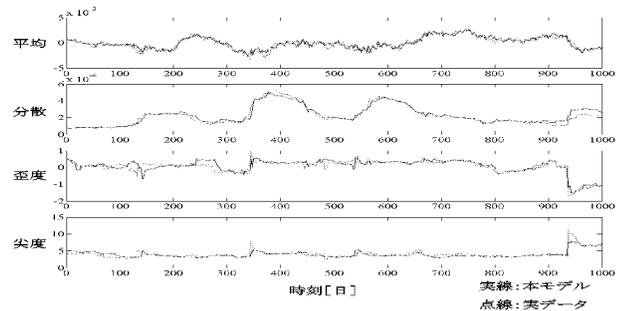


図 2: バリデーションにおける移動の統計量

6 結論

本論文ではマルチエージェントモデルによる証券市場のモデリングの一提案を行った。

また、モデルバリデーションとして本論文で提案するモデルの出力の統計量を実データと比較において、統計量の一致が確認でき、本論文の提案するモデルの有効性が示せた。

参考文献

- [1] Genshiro KITAGAWA, "Monte Carlo Filtering and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models," Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol.5, No.1, pp.1-25,1996.