2002-05-02

未知周期外乱を考慮した不確かな非線形システムに対する適応出力レギュレーション

80122699 鶴岡 秀展　　　指導教員 大森 浩充

1 はじめに

回転動力系を中心とした多くの機械システムでは周波数を事前に知ることのできない周期外乱がシステムに混入することで制御性能が劣化するという問題に直面しており，近年周期外乱を補償する問題が適応出力レギュレーション問題として盛んに議論されている．本論文では，周期外乱の不確かさの他に制御対象の不確かさ，外乱のマッチング条件の緩和，出力フィードバックによる補償を考慮した，非線形システムに対する適応出力レギュレーション問題を解決するための構成法を示す．

2 問題設定

次の n 次元制御対象と q 次元外部システムを考える．

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_{c(n)}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\phi}_0(y) + \boldsymbol{\Phi}_1(y)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\sigma(y)u + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \\ y = \boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{w} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_{c(i)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{i-1} \\ 0 & \boldsymbol{0}^T \end{bmatrix},\ \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \alpha_{q-1} & \\ \vdots & \boldsymbol{I}_{q-1} \\ \alpha_0 & \boldsymbol{0}^T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} := \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nq} \end{bmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{x} \in \Re^n$ は状態（入手不可），$y \in \Re$ は出力，$u \in \Re$ は制御入力，$\boldsymbol{a} \in \Re^p, \boldsymbol{b} = [b_1, \cdots, b_n]^T \in \Re^n$ は一定な未知パラメータ，$\boldsymbol{D} \in \Re^{n\times q}$ は未知一定行列，$\boldsymbol{e}_i$ は単位行列 $\boldsymbol{I}$ の i 番目の列，$\boldsymbol{w} \in \Re^q$ は外部信号（周期外乱）である．関数 $\boldsymbol{\phi}_0(y) := [\phi_{01}, \cdots, \phi_{0n}]^T, \boldsymbol{\Phi}_1(y) := [\boldsymbol{\phi}_{11}^T, \cdots, \boldsymbol{\phi}_{1n}^T]^T, \sigma(y) \neq 0$ は滑らかな関数とする．この問題設定の仮定として，(A1)$\boldsymbol{S}$ は未知一定行列であるが次元 q は既知で固有値は全て虚軸上に存在し重複はない，(A2) 制御対象の相対次数は m，(A3) 制御対象は最小位相系，(A4) 規範出力 y_r に対して $y_r, \cdots, y_r^{(m)}$ が既知で一様有界であり $y_r^{(m)}$ は区分的連続，とする．この問題設定に対する制御目的は，閉ループ系内の全信号が有界で y を y_r に漸近的に追従させるような制御器とパラメータ調整則を設計することである．

3 拡大システムの設計

(1)，(2) 式に対して次の座標変換

$$\bar{x}_1 := x_1 \tag{3}$$

$$\bar{x}_j := -\sum_{i=1}^{n}\alpha_{q+i-j}x_i - \sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{j-1}\left\{\alpha_{q-i+1}h_{(j-i)k}\right\}x_{n+k}$$
$$(j = 2, \cdots, n+q,\ x_{n+k} := w_k) \tag{4}$$

を用いると $n+q$ 次元の拡大システム (5) 式が導出される．

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}_{c(n+q)}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{\phi}}_0(y) + \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1(y)\bar{\boldsymbol{\theta}} + \bar{\boldsymbol{b}}\sigma(y)u \\ y = \boldsymbol{e}_1^T\bar{\boldsymbol{x}},\quad \bar{\boldsymbol{x}} \in \Re^{n+q} \end{cases} \tag{5}$$

ただし，

$$\alpha_q = -1,\ \alpha_k = 0\ (k\ は\ k<0\ \mathit{or}\ q<k\ を満たす整数)$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} := \left[-\sum_{k=1}^{n}\alpha_{q+k-1}b_k,\ \cdots,\ -\sum_{k=1}^{n}\alpha_{q+k-(n+q)}b_k \right]^T$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} := \left[-\alpha_0, \cdots, -\alpha_{q-1}, \boldsymbol{a}^T, -\alpha_0\boldsymbol{a}^T, \cdots, -\alpha_{q-1}\boldsymbol{a}^T\right]^T$$
$$\in \Re^{\ell_1},\ \ (\ell_1 := (p+1)(q+1) - 1)$$

であり，$\bar{\boldsymbol{\phi}}_0(y), \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1(y)$ は $\boldsymbol{\phi}_0(y), \boldsymbol{\Phi}_1(y)$ により構成される滑らかな関数である．ここで，仮定 (A2) より $\bar{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{0}_{(m-1)\times 1}^T, \bar{\boldsymbol{b}}'^T]^T (\bar{\boldsymbol{b}}' \in \Re^{\ell_2}, \ell_2 = n+q-m+1)$ となる．また，h_{ij} は以下のように逐次的に定義された未知一定で有界な信号である．

$$h_{11} := d_{11},\ \cdots,\ h_{1q} := d_{1q} \tag{6}$$

$$h_{i1} := \begin{cases} \alpha_{q-1}h_{(i-1)1} + \cdots + \alpha_0 h_{(i-1)q} + d_{i1} \\ \quad (i = 2, \cdots, n) \\ \alpha_{q-1}h_{(i-1)1} + \cdots + \alpha_0 h_{(i-1)q} \\ \quad (i = n+1, \cdots, n+q) \end{cases} \tag{7}$$

$$h_{ij} := \begin{cases} h_{(i-1)(j-1)} + d_{ij} & (i = 2, \cdots, n) \\ h_{(i-1)(j-1)} & (i = n+1, \cdots, n+q) \end{cases}$$
$$(j = 2, \cdots, q) \tag{8}$$

4 適応 backstepping 法による制御設計

状態推定器の設計

拡大システム (5) 式で入手可能な信号は y のみであり状態 $\bar{\boldsymbol{x}}$ は入手不可能なので，推定誤差 $\boldsymbol{\epsilon} := \bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}$ が指数的に減少するような状態推定器（K-filter）を設計する．具体的には以下のように設計する．

$$\hat{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Omega}^T\boldsymbol{\theta},\quad \boldsymbol{\theta} := [\bar{\boldsymbol{b}}'^T, \bar{\boldsymbol{\theta}}^T]^T \tag{9}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{k}y + \bar{\boldsymbol{\phi}}_0(y) \tag{10}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}^T = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\Omega}^T + \boldsymbol{F}^T(y, u) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{F}^T(y, u) := \left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{(m-1)\times(\ell_2)} \\ \boldsymbol{I}_{\ell_2} \end{bmatrix}\sigma(y)u,\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1(y)\right]$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}^T = [\ \boldsymbol{v}_m,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_{n+q},\ \boldsymbol{\Xi}\ ] \\ \dot{\boldsymbol{\Xi}} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\Xi} + \bar{\boldsymbol{\Phi}}_1(y) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{e}_{n+q}\sigma(y)u \\ \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{A}_0^{n+q-j}\boldsymbol{\lambda},\quad (j = m, \cdots, n+q) \end{cases} \tag{12}$$

ただし，$\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_{c(n+q)} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{e}_1^T$ を安定行列にするように設定する．

制御器・パラメータ調整則の設計

拡大システム (5) 式に適応 backstepping 法 [1] を応用して制御器とパラメータ調整則を設計する．導出結果を定理にまとめる．

[定理]　高周波ゲイン b_m の符号が既知の場合，制御対象 (1) 式と外部システム (2) 式に対して以下の制御入力 u(13) 式，パラメータ調整則 (14)，(15) 式を用いると閉ループ系の全信号が有界となり $y \to y_r (t \to \infty)$ が達成される．

$$u = \frac{1}{\sigma(y)}\left(\beta_m - v_{m,m+1} + \hat{\rho} y_r^{(m)}\right) \tag{13}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\pi}_m, \quad (\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T > 0) \tag{14}$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -\gamma sgn(b_m)(\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) z_1, \quad (\gamma > 0) \tag{15}$$

ただし，$\rho := 1/b_m$ であり，適応 backstepping 法で定義・導出される誤差変数 z_i，安定化関数 β_i，調整関数 $\boldsymbol{\pi}_i (i = 1, \cdots, m)$ は逐次的手順により以下のようになる．

○誤差変数

$$\begin{cases} z_1 = y - y_r \\ z_i = v_{m,i} - \hat{\rho} y_r^{(i-1)} - \beta_{i-1}, \quad (i = 2, \cdots, m) \\ z_{m+1} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

○安定化関数

$$\begin{cases} \beta_1 = \hat{\rho}\bar{\beta}_1, \quad \bar{\beta}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \omega_0 - \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \beta_2 = -\hat{b}_m z_1 - c_2 z_2 - d_2 \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y}\right)^2 z_2 + k_2 v_{m,1} \\ \qquad + \frac{\partial \beta_1}{\partial \boldsymbol{X}_1} \dot{\boldsymbol{X}}_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial y}\left(\omega_0 + \boldsymbol{\omega}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial \beta_1}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\pi}_2 \\ \qquad + \left(\dot{y}_r + \frac{\partial \beta_1}{\partial \hat{\rho}}\right)\dot{\hat{\rho}} \\ \beta_i = -z_{i-1} - c_i z_i - d_i \left(\frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_i + k_i v_{m,1} \\ \qquad + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial \boldsymbol{X}_{i-1}} \dot{\boldsymbol{X}}_{i-1} + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y}\left(\omega_0 + \boldsymbol{\omega}^T \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \\ \qquad + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\pi}_i + \left(y_r^{(i-1)} + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial \hat{\rho}}\right)\dot{\hat{\rho}} \\ \qquad - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \beta_{j-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \boldsymbol{\Gamma} \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \boldsymbol{\omega} z_j, \quad (i = 3, \cdots, m) \end{cases} \tag{17}$$

○調整関数

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}_1 = \left[\boldsymbol{\omega} - \hat{\rho}(\dot{y}_r + \bar{\beta}_1)\boldsymbol{e}_1\right] z_1 \\ \boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_{i-1} - \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \boldsymbol{\omega} z_i, \quad (i = 2, \cdots, m) \end{cases} \tag{18}$$

ただし $\omega_0 = \xi_2 + \bar{\phi}_{0,1}$，$\boldsymbol{\omega} = [v_{m,2}, \cdots, v_{n+q,2}, \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{1(1)} + \boldsymbol{\Xi}_{(2)}]^T$，$\bar{\boldsymbol{\omega}} = [0, v_{m+1,2}, \cdots, v_{n+q,2}, \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{1(1)} + \boldsymbol{\Xi}_{(2)}]^T$，$c_i > 0$，$d_i > 0$，$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_i = [\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+q-m+i}]^T$，$\bar{\boldsymbol{y}}_i = [y_r, \cdots, y_r^{(i-1)}]^T$，$\boldsymbol{X}_i = [\boldsymbol{\xi}^T, vec(\boldsymbol{\Xi})^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i^T, \bar{\boldsymbol{y}}_i^T]^T$ である．　□

なお，高周波ゲイン b_m の符号が未知の場合には Nussbaum ゲインを用いた適応 backstepping 法により問題を解決することができる．

5　数値例

$$P: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - a_1 y \\ \dot{x}_2 = -a_2 y - a_3 y^3 + b_2 u + d w_1 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{19}$$

$$W: \ \dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = -\mu^2 w_1 \tag{20}$$

条件設定として $a_1 = 2$，$a_2 = 1$，$a_3 = -1$，$b_2 = 1$，$d = 2$，$\mu = 1$，$c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1$，$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{I}_{10}$，$\gamma = 5$，$\boldsymbol{k} = [4, 6, 4, 1]^T$，$x_1(0) = 1$，$x_2(0) = 2$，$\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\Xi}(0) = \boldsymbol{0}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = [1, \cdots, 1]^T$，$\hat{\rho}(0) = 1$ とし，規範出力 y_r は $200[sec]$ ごとに -0.5 と 0.5 の値を交互にとる矩形波とした．

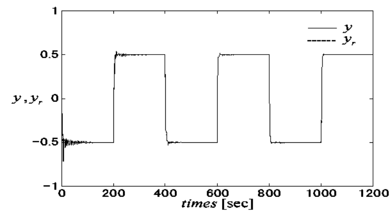

図 1: 出力 y と規範出力 y_r の結果

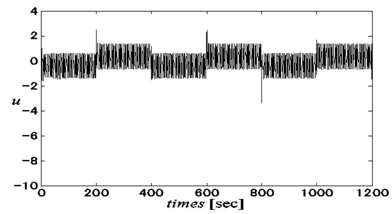

図 2: 制御入力 u の結果

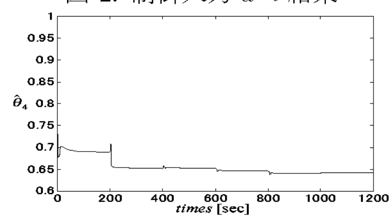

図 3: パラメータ推定値 $\hat{\theta}_4$ の結果（真値：$\theta_4 = 0.25$）

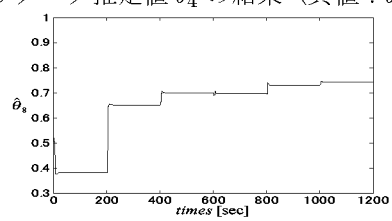

図 4: パラメータ推定値 $\hat{\theta}_8$ の結果（真値：$\theta_8 = 0.5$）

6　結論

制御対象と外部システムから設計される拡大システムに対して適応 backstepping 法を応用して制御器とパラメータ調整則を設計することにより，周波数の未知な周期外乱が混入する不確かな非線形システムに対する適応出力レギュレーション問題を解決する構成法を提案した．

参考文献

[1] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley, New York, 1995.