

受動性理論に基づくPIDコントローラの調整法

学術番号 80023264 山口 毅 指導教員 志水 清孝

1. はじめに

本研究では、PIDコントローラによるシステムの漸近安定化制御を研究する。制御対象には一入力一出力の n 次元可制御・可観測なシステムを考える。このスカラー系に対して目標値を原点としたレギュレータ問題を考える。PIDコントローラの形をした仮想的な出力を考え、その出力による直結フィードバック制御を施すことにより系が漸近安定化されることを示す。このとき、P,I,Dの各項目に同じ比例係数が掛け合わせられる。この比例係数はPID制御の性能に関する新たな設計パラメータと考えることができる。零ダイナミクスを安定化させることを考え、PIDパラメータを決定する。そのパラメータ決定方法は擬似極配置法^[1]と呼ばれる方法を応用する。本研究で紹介する方法は、PID項に掛かる比例定数が存在することで、応答の速応性を改善させることが可能となっている。本研究は容易にサーボ系に適用することもできる。

2. PIDコントローラの定式化

次のような可制御・可観測な線形システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = cx(t) \quad (2.1b)$$

を考える。ここで、 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R$, $y(t) \in R$ はそれぞれ状態ベクトル、制御入力、出力である。

上記のシステムに対して一般にPIDコントローラは

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(t) + u_0 \quad (2.2)$$

と与えられる。ただし u_0 は手動リセット量、 k_P, k_I, k_D は比例、積分、微分係数と呼ばれるPIDコントローラのパラメータである。また、 $e(t) = y_d - y(t)$ は偏差信号をあらわし、 y_d は出力の所望値である。

さて、(2.2)を1階時間微分した値、つまり速度型のIPDコントローラは次のように書き表すことができる。

$$\dot{u}(t) = k_I e(t) + k_P \dot{e}(t) + k_D \ddot{e}(t) \quad (2.3)$$

ここで、システム(2.1a),(2.1b)における A, b, c は次のような可制御正準形の形をしていると仮定する。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

上記の c はとくに一般性を失うことなく $c_n = 0$ と仮定する[†]。さて、次に $\dot{u} = v$ としたときの拡大系システムを考える。

[†] 多くの場合 $c_n = 0$ と仮定しても差障りがない。一般に入出力微分方程式は下記のように表せる。

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y \\ = d_n u^{(n-1)} + d_{n-1}u^{(n-2)} + \cdots + d_2\dot{u} + d_1u \end{aligned} \quad (i)$$

このシステムの伝達関数は

$$G(s) = \frac{d_n s^{n-1} + d_{n-1} s^{n-2} + \cdots + d_2 s + d_1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (ii)$$

である。さて、 $c = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$ における c_n は上記の(ii)の分母の d_n の部分である。一般に伝達関数、あるいは入出力微分方程式を考えるとき、 d_n は高次の項であり、この部分があるようなシステム例はあまり見当たらない。しかし一般にはありうる。よって、実際に $d_n = c_n = 0$ としても差障りがないと考えられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (2.4)$$

ここで仮想的な出力 $Y \in R^1$ を次のように仮定する。

$$Y(t) = -\{k_I e(t) + k_P \dot{e}(t) + k_D \ddot{e}(t) + \beta(u_s - u(t))\} \quad (2.5)$$

この式は、“{速度型IPDコントローラ} + $\beta(u_s - u(t))$ ” という構造になっている。ただし、 u_s は既知であり、レギュレータ問題のときは0とする。本研究では $y_d = 0$, $u_s = 0$, つまりレギュレータ問題として考える。よって、上記の仮想的な出力(2.5)は(2.1b)を代入し、 $cb = 0$ であるので次のようになる。

$$Y(t) = [k_I c + k_P cA + k_D cA^2 \quad k_D cAb + \beta] \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

さて、本研究におけるIPDコントローラは次の形をしている。

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= v(t) = -\alpha Y \\ &= -\alpha \{k_I y(t) + k_P \dot{y}(t) + k_D \ddot{y}(t) + \beta u(t)\} \\ &= -\alpha \{(k_I c + k_P cA + k_D cA^2)x(t) \\ &\quad + (k_D cAb + \beta)u(t)\}, \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

そして、拡大系である下記の閉ループシステム(2.8)を漸近安定化する。ただし、 $\tilde{k} = k_I c + k_P cA + k_D cA^2$ とおいた。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b \\ -\alpha \tilde{k} & -\alpha(k_D cAb + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

3. 安定なIPDコントローラ的设计 (最小位相系の安定化)

まず、本研究で重要な次の命題を挙げる。

【命題1】 線形システム(2.1a),(2.1b)が相対次数1^[2]をもち、 $cb \neq 0$ であるとする。また、(2.1a),(2.1b)は最小位相と仮定する。このときある出力フィードバック制御則

$$u = -\alpha y, \quad \alpha > 0 \quad (3.1)$$

が存在して、線形システム(2.1a)を漸近安定化することができる。

(証明) 省略。リアプノフの安定理論を用いたフィードバック安定化を考えればよい。または、同様の命題を出力フィードバック受動化を行い、受動性理論を用いて証明できる。 ■

上記の命題は本研究では、拡大系に対して用いられる。以下、零ダイナミクスを求め、IPDコントローラを設計する。システム(2.4),(2.6)の v に対する相対次数を確認する。よって、 $(k_D cAb + \beta) \neq 0$ であると仮定すれば(2.4)の相対次数は1となる。ただし、 $\beta = 0$ のときは $c_{n-1} \neq 0$ と仮定する。一方、 $cAb = 0$ となった場合、 β を有限の値として設定する。さて、相対次数が1なので標準形(ノーマルフォーム)に変換できる。変換後の標準形は次のように計算される。

$$\dot{z} = \left\{ A - b\tilde{k}(k_D cAb + \beta)^{-1} \right\} z + b(k_D cAb + \beta)^{-1} \xi_1 \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \tilde{k} \left(A - b\tilde{k}(k_D cAb + \beta)^{-1} \right) z + \tilde{k} b(k_D cAb + \beta)^{-1} \xi_1 \\ &\quad + (k_D cAb + \beta)v \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$Y = \xi_1 \quad (3.2c)$$

ゆえに零ダイナミクスは次のようになる。

$$\dot{z} = \left[A - \frac{b(k_I c + k_P cA + k_D cA^2)}{k_D cAb + \beta} \right] z \quad (3.3)$$

(3.3) を Hurwitz であると仮定すれば, (3.3) は漸近安定, つまりシステムは最小位相であるということが出来る. また, 命題 1 における cb の形はここでは (2.4) と (2.6) より $(k_D cAb + \beta) \neq 0$ を満足していなければならない.

以上から, 出力 (2.6) の Y は v に対する相対次数が 1 である, ある出力フィードバック (2.7) が存在して, (2.4), (2.7) から得られる閉ループ系 (2.8) は漸近安定となる.

以上で述べてきたことから, システム (2.1a) を漸近安定化させる次の IPD コントローラが求まった.

$$\dot{u}(t) = -\alpha \{k_I y(t) + k_P \dot{y}(t) + k_D \ddot{y}(t) + \beta u(t)\}, \quad \alpha > 0 \quad (3.4)$$

4. パラメータ値 k_I, k_P, k_D の決定

本節における問題は (3.3) の零ダイナミクスが Hurwitz になるような k_I, k_P, k_D を決定することである. 方法としては擬似極配置法^[1]を応用する.

所望の極をもつ n 次元の行列を考え, そのときの特性方程式を次のように与える.

$$s^n + a_{n-1}^o s^{n-1} + \dots + a_2^o s^2 + a_1^o s + a_0^o = 0 \quad (4.1)$$

(4.1) を因数分解して, 次のように所望極 $\alpha_i + j\beta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ を求める.

$$\{s - (\alpha_1^o + j\beta_1^o)\} \times \dots \times \{s - (\alpha_n^o + j\beta_n^o)\} = 0 \quad (4.2)$$

このとき共役複素根の場合は数値的に $\alpha_j^o = \alpha_{j+1}^o$, $\beta_j^o = -\beta_{j+1}^o$ のようになるがこれはかまわない. 実部のみときは $\beta_j^o = 0$ となる.

一方, 零ダイナミクス (3.3) の行列の特性方程式は

$$s^n + \gamma_{n-1}(k_I, k_P, k_D) s^{n-1} + \dots + \gamma_0(k_I, k_P, k_D) = 0 \quad (4.3)$$

と表す. この式の係数は k_I, k_P, k_D の関数であるが, この特性方程式の極を考える. この極はまだ未知の極であり, 所望極をもつ特性方程式に最良近似したときに達成できる特性方程式は次のようになる.

$$\{s - (\alpha_1 + j\beta_1)\} \times \dots \times \{s - (\alpha_n + j\beta_n)\} = 0 \quad (4.4)$$

すなわち, $\{\alpha_i + j\beta_i\}$ は所望極の集合にもっとも近づけられた極の集合である. (4.4) を展開すると次のようになる.

$$s^n + \xi_{n-1}(\alpha, \beta) s^{n-1} + \dots + \xi_0(\alpha, \beta) = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{where } \alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T, \beta = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]^T$$

したがって, 最良近似問題は次のように書かれる.

$$\min_{k_I, k_P, k_D} \sum_{i=1}^n w_i \{(\alpha_i^o - \alpha_i)^2 + (\beta_i^o - \beta_i)^2\} \quad (4.6a)$$

$$\text{subj. to } \begin{cases} \gamma_{n-1}(k_I, k_P, k_D) - \xi_{n-1}(\alpha, \beta) = 0 \\ \gamma_{n-2}(k_I, k_P, k_D) - \xi_{n-2}(\alpha, \beta) = 0 \\ \vdots \\ \gamma_0(k_I, k_P, k_D) - \xi_0(\alpha, \beta) = 0 \end{cases} \quad (4.6b)$$

$$\text{where } \alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T, \beta = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]^T$$

ここで $w_i, i = 1, 2, \dots, n$ は重み係数である. 問題 (4.6) は静的な等式制約条件付最適化問題 (非線形計画問題) なので, 外点ペナルティ法や乗数法を適用して容易に解くことができる.

〈閉ループシステムの安定性について〉

(3.3) が Hurwitz なら命題 1 によって出力フィードバック (2.7) により閉ループシステム (2.8) の安定性は保証される. もし (3.3) に不安定極があれば (4.6b) 中の対応した重み係数 w_i を大きく調整するというような方法も考えられる. あるいは虚軸近くで存在する極については

$$\alpha_j \leq -\varepsilon, \quad j \in J_I \quad (4.6c)$$

を問題 (4.6) に付加して最良近似問題 (IPD パラメータ最適化問題) を解き, k_I, k_P, k_D を決定すればよい.

本論文における IPD コントローラのパラメータの設計方法が問題となる. 以下, 設計方法を提案する.

《計算手順》

[1] システム (2.1a) に対するリカッチ代数方程式

$$PA + A^T P - Pbr'^{-1}b^T P + Q' = 0$$

を解き, 解 P を求める. ただし, $r' = 1, Q' = c^T c$ とする. あるいは $Q' = \text{diag}(q_{11}, \dots, q_{nn})$ とする.

[2] 最適フィードバックを施したときの閉ループ系 $\dot{x} = (A - br'^{-1}b^T P)x$ の最適極を求める.

[3] [2] で求めた極に (3.3) の極が近似されるように k_I, k_P, k_D を擬似極配置法を用いて決定する.

[4] 得られた k_I, k_P, k_D のもとで IPD コントローラ (3.4) を実行する. さらに, パラメータの α を調整することにより, 収束性を改善する.

5. シミュレーション

伝達関数が

$$G_p(s) = \frac{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 289)}{s(s - 0.4)(s + 0.8)(s^2 + 1.45s + 361)} \quad (5.1)$$

で表わされる不安定プラントに対して本手法を適用する. 状態空間表現は下記ようになる.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 115.52 & -143.94 & -361.26 & -1.85 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [28.9 \ 289.2 \ 2.1 \ 1 \ 0] x$$

パラメータは $(k_I, k_P, k_D) = (0.7664, 0.1943, 0.2718)$ のように求まる. 結果を Fig.1 に示す. 内部安定性も確認されており, α の値を変えることにより, 制御成績を改善することもできた.

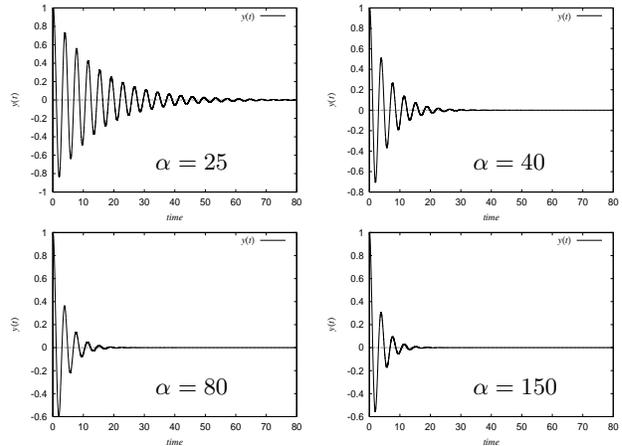


Fig.1 : 次数 5, 相対次数 3 の不安定プラント
 $x(0) = (1/28.9, 0, 0, 0, 0)$, $u(0) = 0.0$, $y(0) = 1.0$

6. 終わりに

零ダイナミクスが Hurwitz になるように k_I, k_P, k_D が求められれば命題 1 による出力フィードバックによりシステムの漸近安定性は保証される. さらに, 新しいパラメータ α により, 収束性を改善することができる.

7. 参考文献

- [1] 志水, 山口, 本城, “PID 制御器の擬似極配置によるパラメータ調整法”, 第 1 回制御部門大会, 567/572, 2001.
- [2] 山口, 志水, “カオス系 (Lorenz model) の直接こう配降下制御法による安定化制御”, 電子情報通信学会 A, vol.J54-A, no.5, pp595-605, 2001.