2001-09-02

力学系におけるハミルトニアンシステムの解析と最適化

学籍番号 80023026　町田 洋樹，指導教員　志水 清孝

1. 概要

本論文の目的は，力学系の非線形システムを状態方程式 ($\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$) ではなくハミルトニアンシステムとしてとらえ，ニューラルネットを用いて最適フィードバック則を設計し，一般化座標と運動量の最適な安定化を図ることである．対象とするハミルトンの正準方程式は以下のように表現される．

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T \\ -\dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T + \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y} &= \dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T = \dot{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{q} \in R^n$ は一般化座標，$\boldsymbol{p} \in R^n$ は運動量ベクトル，$\boldsymbol{u} \in R^m$ は制御入力，$\mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ はハミルトニアンと呼ばれるエネルギー関数，$\boldsymbol{y} \in R^m$ は出力ベクトルである．

2. ハミルトニアンシステムの定式化

ハミルトニアンシステムとは，ラグランジュの運動方程式と本質的に等価なものであり，次のように変換される．

まず，ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)^T - \frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \boldsymbol{q}}^T = \boldsymbol{u} \tag{1}$$

で表わされた．ただし，

$$\begin{aligned}
&L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q}) \ \text{（ラグランジアン）} \\
&K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T R(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \ \text{（運動エネルギー）} \\
&V(\boldsymbol{q}) \ \text{（ポテンシャルエネルギー）}
\end{aligned}$$

である．いま，

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}^T = \frac{\partial K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}^T \tag{2}$$

と定義し，これを一般化運動量と呼ぶことにする．運動エネルギーは慣性行列 $R(\boldsymbol{q})$ を用いて $K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T R(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$ のように表わされるので，一般化運動量のベクトル $\boldsymbol{p}$ は，

$$\boldsymbol{p} = R(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{3}$$

と表わされる．ここで，さらに Legendle 変換

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{p} - L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{4}$$

を施すことで結局

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) &= 2K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - (K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q})) \\
&= K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + V(\boldsymbol{q}) \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^T R^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p} + V(\boldsymbol{q})
\end{aligned} \tag{5}$$

であることがわかる．このハミルトニアン $\mathcal{H}$ を用いて，前節のハミルトニアンの正準方程式を得ることができる．

3. 非線形最適レギュレータ問題

最適レギュレータは，最適制御入力のための状態フィードバック制御則を与えることができ，閉ループ制御系を構成できる点で重要である．まず，次のような時不変非線形システムの非線形最適レギュレータ問題を考える．

$$\min_{\boldsymbol{u}} V(\boldsymbol{u};\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{p}_0,\infty) = \int_0^\infty \{q(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t)) + \boldsymbol{u}(t)^T R\boldsymbol{u}(t)\}dt \tag{6a}$$

$$\text{subj.to} \ \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T \\ -\dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T + \boldsymbol{u} \end{bmatrix}, \ \begin{array}{l} \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0 \\ \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}_0 \end{array} \tag{6b}$$

次の仮定をおく．

[仮定 (i)] システム (6b) は任意の初期条件 $\boldsymbol{x}(0)$ に対して $t \to \infty$ で $\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t) \to \boldsymbol{0}$ となるような制御則 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ が存在するという意味で可安定である．

[仮定 (ii)] $\dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T, \dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T$ は $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{u}$ について連続微分可能で，かつ $\left.\dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T\right|_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}}, \left.\dfrac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T\right|_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$ である．

[仮定 (iii)] $q(\boldsymbol{0}) = 0$, $q(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t)) \geq 0$, $R > 0$ とする．

以上の仮定のもとでこの問題に対して非線形最適状態フィードバックコントローラ $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ を設計する．

この問題は Bellman の最適性原理に基づき次の Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式に帰着する．

$$\begin{aligned}
0 &= \min_{\boldsymbol{u}} H\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{u},V_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),V_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\right) \\
&= \min_{\boldsymbol{u}} \left\{ q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} + V_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T \right. \\
&\qquad \left. + V_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\left(-\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T + \boldsymbol{u}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

ただし，$H\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{u},V_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),V_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\right)$ はハミルトン関数，$V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ は値関数 (value function) である．最適制御は，最適制御の定理により $\boldsymbol{u}$ に対する最適性必要条件，値関数に対する境界条件から次のような１階偏微分方程式を満たさねばならない．

$$\begin{aligned}
&q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} + V_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T \\
&\qquad + V_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\left(-\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T + \boldsymbol{u}\right) = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

$$V(\boldsymbol{0}) = 0 \tag{9}$$

$$2R^T\boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{\boldsymbol{q}}^T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ V_{\boldsymbol{p}}^T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

また，原点 ($\boldsymbol{q},\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$) 近傍 Ω において閉ループシステムの漸近安定を保証するためにはためには, 正定なリアプノフ関数が存在して, その時間微分 $\dot{V}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ が負定であれば十分である．値関数 $V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ は

$$V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{q},\boldsymbol{p} \in \Omega/\{\boldsymbol{0}\}, \quad V(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) = 0 \tag{11}$$

であり,$\dot{V}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ は (8) より

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) &= V_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T + V_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T + \boldsymbol{u}\right) \\
&= -q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} < 0
\end{aligned} \tag{12}$$

が成り立つので $V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ は自然なリアプノフ関数である．

4. ニューラルネットを用いた HJB 方程式の解近似

ここでは，第１節のように書けるアフィン非線形システムに対して論じる．(9),(11) を満たす値関数 $V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ を以下の３層ニューラルネットにより次のように構成する．

$$\boldsymbol{z}(t) = W_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}(t) \\ \boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\theta}_1 \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = W_2 \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{z}(t)) + \boldsymbol{a} \tag{13b}$$

$$V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} \tag{14}$$

ここで，$W_1 \in R^{q\times 2n}, W_2 \in R^{2n\times q}$ は結合重み行列，$\boldsymbol{z} \in R^q$ は内部状態，$\boldsymbol{\theta}_1 \in R^q$ は閾値，$\boldsymbol{y} \in R^n$ は出力，$\boldsymbol{a} \in R^n$ は人工変数，$\boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ はシグモイド関数 (ここでは $\tanh(\cdot)$) である．境界条件 $V(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$ は $\boldsymbol{a} = -W_2\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}_1)$ とおくことで容易に満たされる．

非線形最適レギュレータ問題は (8)〜(11) を同時に満たす値関数 $V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ を HJB 方程式より求めることと等価であり $V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ を用いて (10) より非線形最適フィードバック制御則を

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{2}R^{-1} \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\boldsymbol{q}}^T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ V_{\boldsymbol{p}}^T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \tag{15}$$

として与えることができる．

まず, 次のように原点を含む局所的領域 Ω を離散化した Δ において,(8),(10) により制御則が一意に決定されることを考慮し, これらより誤差 e として次式を定義する．

$$\Delta \stackrel{\triangle}{=} \{\boldsymbol{q}^p, \boldsymbol{p}^p | \boldsymbol{q}^p, \boldsymbol{p}^p \in \Omega, p = 1,2,\cdots,P\} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} e(\boldsymbol{q}^p,\boldsymbol{p}^p) &= q(\boldsymbol{q}^p,\boldsymbol{p}^p) + V_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}^T \\ &\quad - V_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{q}}^T \\ &\quad - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} V_{\boldsymbol{q}}^T(\boldsymbol{q}^p,\boldsymbol{p}^p) \\ V_{\boldsymbol{p}}^T(\boldsymbol{q}^p,\boldsymbol{p}^p) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \\ &\quad \times R^{-1}\begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V_{\boldsymbol{q}}^T(\boldsymbol{q}^p,\boldsymbol{p}^p) \\ V_{\boldsymbol{p}}^T(\boldsymbol{q}^p,\boldsymbol{p}^p) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

このとき非線形最適レギュレータ問題は，ニューラルネットの学習によって次のように定義した評価関数を最小化し, 最適な結合重みを求める問題に換言される．

$$E[W_1,W_2,\boldsymbol{\theta}_1] = \sum_{p=1}^{P} e(\boldsymbol{q}^p,\boldsymbol{p}^p)^2 \tag{18}$$

最適な結合重みを得るためには誤差逆伝搬法を応用して (18) の W_1, W_2 に関する勾配を求め結合重みを更新すればよい．本論文では複雑な成分計算を避けるためラグランジュ未定乗数法を応用してこの勾配を求め，最適化の手法としては準ニュートン法を利用した．

5. 具体的な数値例

倒立振子モデルに対して本論文で提案した制御器の設計法をハミルトンの正準方程式に適用し，状態方程式に適用した場合と比較した．振子の角度，台車の位置 θ, r を０に収束させることを目的とし，シミュレーションを行った．(この系では摩擦がないため，制御前のアームは **Fig.2**,**Fig.3**,**Fig.4**,**Fig.5** に示されるように振幅を減衰させることなく往復運動する.)

ハミルトンの正準方程式での初期条件を

$$(\boldsymbol{q}(0)^T, \boldsymbol{p}(0)^T) = (\pi/10, 0.3, 0.0, 0.0)$$

($\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ はそれぞれリンクの角度, 角運動量) とし，これに対応する状態方程式表現での初期点を

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\pi/10, 0.3, 0.0, 0.0)$$

($(x_1, x_2), (x_3, x_4)$ はそれぞれリンクの角度, 角速度) とした場合のシミュレーション結果を以下に示した．

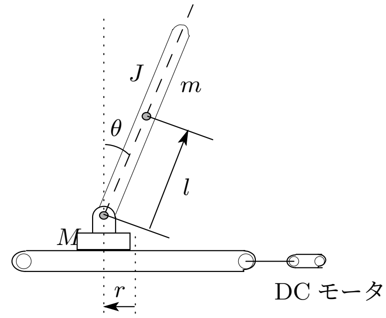

Fig.1　倒立振子モデル

状態方程式	ハミルトンの正準方程式

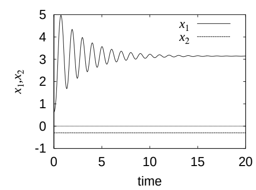

Fig.2　制御前の x_1, x_2 の応答

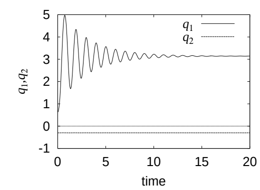

Fig.3　制御前の $\boldsymbol{q}$ の応答

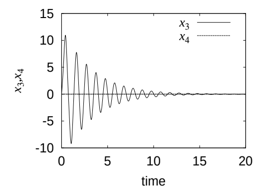

Fig.4　制御前の x_3, x_4 の応答

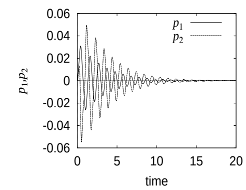

Fig.5　制御前の $\boldsymbol{p}$ の応答

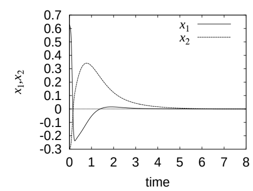

Fig.6　振子の角度, 台車の変位 x_1, x_2 の応答

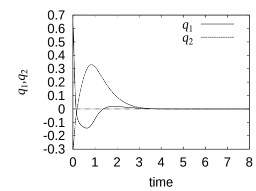

Fig.7　振子の角度, 台車の変位 $\boldsymbol{q}$ の応答

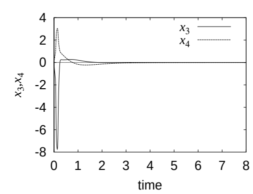

Fig.8　振子の角速度, 台車の速度 x_3, x_4 の応答

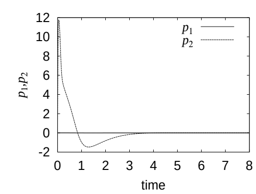

Fig.9　一般化運動量 $\boldsymbol{p}$ の応答

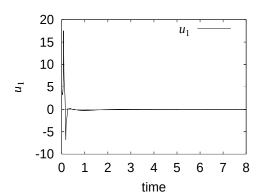

Fig.10　制御入力 $\boldsymbol{u}$ の軌道

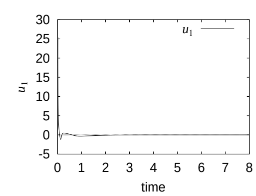

Fig.11　制御入力 $\boldsymbol{u}$ の軌道

6. 結論

シミュレーション結果より，２リンクロボットマニピュレータの場合，状態方程式よりもハミルトンの正準方程式を対象とした方が短時間で安定化できることが確認できる．

参考文献

[1] C.J.Goh,On the Nonlinear Optimal Regulator Problem,Automatica,Vol.29,No.3,751/756,1993

[2] K.Fujimoto and T.Sugie, Canonical Transformation and Stabilization of Generalized Hamiltonian Systems, Proc. 4th IFAC Symp. NOLCOS 1998