

# PID コントローラのパラメータ最適化に関する研究

学籍番号 80022376 谷口 直人, 指導教員 志水 清孝

## 1. 概要

行列を決定変数とする行列最適化理論を応用し PID コントローラのパラメータ最適化を行う。

すなわち評価関数を  $K_P, K_I, K_D$  の関数であるとし、評価関数の  $K_P, K_I, K_D$  に関する勾配を導出し、その勾配を用い最急降下法を行うことによって PID ゲイン  $K_P, K_I, K_D$  の最適解を求める。また PID 制御には積分項が含まれるため状態空間表現されたシステムでは解析しにくい。そのため PID 制御入力  $u(t)$  を時間微分した速度型 PDD<sup>2</sup> 制御の入力  $\dot{u}(t)$  というものを用いる。

## 2. 行列最適化理論<sup>[1]</sup>

以下のようなパラメータ行列  $A$  に関する最適化問題を考える。

$$\min_{A \in M(l, m)} \phi[A] \triangleq w(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), A) dt \quad (1a)$$

$$\text{subj. to } \dot{x}(t) = f(x(t), A), x(t_0) = x_0 \quad (1b)$$

このとき評価関数  $\phi[A]$  のパラメータ  $A$  に関する勾配  $\nabla \phi[A]$  は、

$$\dot{x}(t) = \nabla_{\psi} H(x(t), A, \psi(t)), x(t_0) = x_0 \quad (2a)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\nabla_x H(x(t), A, \psi(t)), \psi(t_1) = \nabla_x w(x(t_1)) \quad (2b)$$

$$\nabla \phi[A] = \int_{t_0}^{t_1} \nabla_A H(x(t), A, \psi(t)) dt \quad (2c)$$

で与えられる。ここで  $H$  はハミルトン関数と呼ばれる以下のような関数である。

$$H(x(t), A, \psi(t)) = f_0(x(t), A) + \psi^T(t) f(x(t), A) \quad (3)$$

## 3. PID パラメータの最適化問題

### 3.1 PID 制御

一般的に多入力多出力非線形システムは、以下のようにかける。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (4a)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (4b)$$

$$x(t) \in R^n, y(t) \in R^m, u(t) \in R^r$$

PID コントローラは

$$u(t) = K_P(y_d - y(t)) + K_I \int (y_d - y(t)) dt + K_D \frac{d}{dt} (y_d - y(t)) + u_0 \quad (5)$$

で表せる。

PID 制御とは出力誤差  $e(t) = y_d - y(t)$  に比例 (P)、積分 (I)、微分 (D) 動作によるゲイン  $K_P, K_I, K_D$  を与えた制御方式であり、PID 制御器は線形プラントにも非線形プラントにも現場で広く利用されている。

PID 制御においては、 $K_P, K_I, K_D$  を決定することが重要となる。

### 3.2 速度型 PDD<sup>2</sup> 制御

基本的な PID コントローラ (5) を時間微分した  $\dot{u}(t)$  は

$$\dot{u}(t) = K_I(y_d - y(t)) - K_P \dot{y}(t) - K_D \ddot{y}(t) \quad (6)$$

となる。

勾配関数を導出するにあたって上記のような速度型 PDD<sup>2</sup> 制御則というものを用いる。出力  $y(t)$  が (4b) で表せるならば

$$y(t) = h(x(t)) \quad (7)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dh(x(t))}{dx(t)} f(x(t), u(t)) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) = & \left\{ \left( \frac{d}{dx(t)} \frac{dh(x(t))}{dx(t)} \right) f(x(t), u(t)) \right\} f(x(t), u(t)) \\ & + \frac{dh(x(t))}{dx(t)} \left( \frac{df(x(t), u(t))}{dx(t)} f(x(t), u(t)) \right. \\ & \left. + \frac{df(x(t), u(t))}{du(t)} \frac{du(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。これより (6) は

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & \left( I_r + K_D \frac{dh(x(t))}{dx(t)} \frac{df(x(t), u(t))}{du(t)} \right)^{-1} \\ & \left[ K_I(y_d - h(x(t))) - K_P \frac{dh(x(t))}{dx(t)} f(x(t), u(t)) \right. \\ & - K_D \left\{ \left( \frac{d}{dx(t)} \frac{dh(x(t))}{dx(t)} \right) f(x(t), u(t)) \right\} f(x(t), u(t)) \\ & \left. - K_D \frac{dh(x(t))}{dx(t)} \frac{df(x(t), u(t))}{dx(t)} f(x(t), u(t)) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

となり  $\dot{u}(t)$  は  $x(t), u(t)$  および  $K_P, K_I, K_D$  の式で表すことができる。

### 3.3. 勾配関数の導出

最適化すべき評価関数は

$$\phi[K_P, K_I, K_D] = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), K_P, K_I, K_D) dt \quad (11)$$

とする。

また (10) より

$$\dot{u}(t) = g(x(t), u(t), K_P, K_I, K_D) \quad (12)$$

とおく。

以上のことより PID パラメータの最適化に関する問題は以下のようにかける．

$$\begin{aligned} \min_{K_P, K_I, K_D} \quad & \phi[K_P, K_I, K_D] \\ \triangleq \quad & \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D) dt \quad (13a) \\ \text{subj.to} \quad & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (13b) \\ & \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (13c) \end{aligned}$$

このような  $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$  の拡大系のシステムに対して行列最適化理論を応用する．

ハミルトン関数を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) \\ = f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D) + \psi_1^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ + \psi_2^T(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D) \quad (14) \end{aligned}$$

ただし

$$\psi_1(t) \in R^n, \psi_2(t) \in R^r \quad (15)$$

で定義されたベクトルである．

評価関数の  $K_P, K_I, K_D$  に関する勾配は、以下で与えられる．

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla_{\psi_1} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) \quad (16a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \nabla_{\psi_2} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) \quad (16b)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) \quad (16c)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\nabla_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) \quad (16d)$$

$$\nabla_{K_P} \phi[K_P, K_I, K_D]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \nabla_{K_P} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) dt \quad (16e)$$

$$\nabla_{K_I} \phi[K_P, K_I, K_D]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \nabla_{K_I} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) dt \quad (16f)$$

$$\nabla_{K_D} \phi[K_P, K_I, K_D]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \nabla_{K_D} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), K_P, K_I, K_D, \psi_1(t), \psi_2(t)) dt \quad (16g)$$

これらのシステム方程式 (16a),(16b), 随伴方程式 (16c),(16d) を解き勾配関数 (16e),(16f),(16g) を計算し最急降下法を用いて  $K_P, K_I, K_D$  を更新していき最適解を求める．

#### 4. 数値例

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{8}{20} & -\frac{62}{20} & -\frac{147}{20} & -\frac{113}{20} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{260}{20} & \frac{390}{20} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (18)$$

目標値を  $y_d = 1$  とした．Fig.1 に出力  $y(t)$  の結果を示した．

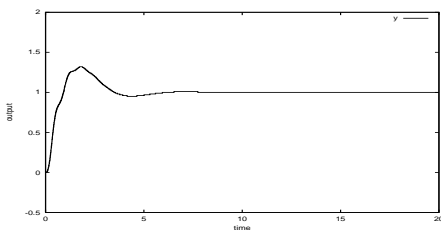


Fig.1: 出力  $y(t)$  の結果,  $k_P = 11.67, k_I = 6.86, k_D = 8.21$

また Rayleigh Model に対してもシミュレーションを行った．

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (19a)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + (1.4 - 0.14x_2^2(t))x_2(t) + 4u(t) \quad (19b)$$

出力は  $y(t) = x_1(t)$  とした．出力の所望値  $y_d$  を  $y_d = 1$  とした．Fig.2 に出力  $y(t)$  の結果を示した．

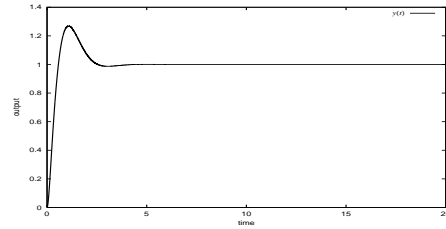


Fig.2: 出力  $y(t)$  の結果,  $k_P = 7.95, k_I = 11.15, k_D = 3.37$

また 2Link Manipulator についてもシミュレーションを行った．

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \quad (20a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = -(\mathbf{J}_0 + \mathbf{R}(\mathbf{x}_1(t)))^{-1} \left\{ \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{S}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) + \mathbf{B}_0 \right) \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \right\} \quad (20b)$$

出力は  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t)$  とした．所望値は  $\mathbf{y}_d = [\pi/10, \pi/5]^T$  とした．

$$K_P = \begin{bmatrix} 71.33 & 0 \\ 0 & 51.80 \end{bmatrix}, K_I = \begin{bmatrix} 69.85 & 0 \\ 0 & 105.99 \end{bmatrix}$$

$$, K_D = \begin{bmatrix} 55.93 & 0 \\ 0 & -2.49 \end{bmatrix}$$

とした結果を Fig.3

$$K_P = \begin{bmatrix} 75.33 & -3.53 \\ -9.28 & 54.04 \end{bmatrix}, K_I = \begin{bmatrix} 69.09 & 4.09 \\ 8.55 & 113.21 \end{bmatrix}$$

$$, K_D = \begin{bmatrix} 63.07 & 0.57 \\ 13.57 & -0.62 \end{bmatrix}$$

とした結果を Fig.4 に示した．

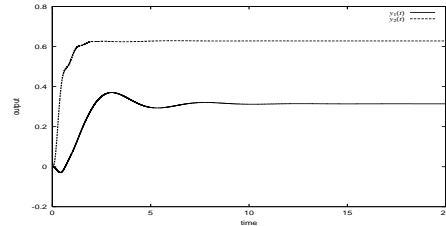


Fig.3: 2Link Manipulator;  $K_P, K_I, K_D$  を対角行列とした結果

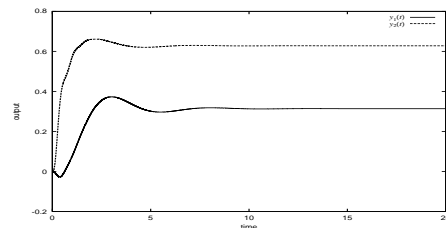


Fig.4:  $K_P, K_I, K_D$  を対角行列としないときの結果

#### 5. 結論

数値例によりこの PID コントローラの最適化手法は線形システム, 非線形システムの各々において非常によい結果が得られた．

#### 参考文献

- [1] 志水 清孝, 最適制御の理論と計算法, コロナ社, 1994