

時変拡張カルマンフィルタによる適応等化器の一設計法

80022680 西山 真吾

指導教員 佐野 昭

1 まえがき

受信信号のみから伝送路特性と送信信号の同時推定を行う適応等化器として、高次統計量や拡張カルマンフィルタを用いた手法が提案されているが、演算量や線形近似による推定誤差等の問題点がある。本論文では、伝送路の時変性を考慮した非線形モデルに対し、線形化を行わず確率変数の分布を標本点により近似する計算法を用いたカルマンフィルタによる適応等化器を提案し、その有効性を数値例により示す。

2 時変伝送路のブライント等化問題

伝送路モデルとして次式の時変 FIR システムを考える。

$$y(k) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i(k)u(k-i) + v(k) = \mathbf{u}^T(k)\mathbf{h}(k) + v(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{h}(k) = [h_0(k), h_1(k), \dots, h_{n-1}(k)]^T$$

$$\mathbf{u}(k) = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n+1)]^T$$

ただし、 $u(k)$ は未知送信信号、 $y(k)$ は受信信号、 $v(k)$ は伝送路雑音、 $h_i(k)$ は時変 FIR システムの係数を表す。

以下の議論のため次の仮定をおく。

- (A1) インパルス応答長の上限は既知で、 $n-1$ とおく。
 (A2) $u(k)$ は符号化された離散値をとり、平均値 \bar{u} 、分散 σ_u^2 。
 (A3) $v(k)$ は $u(k)$ と独立なガウス性で、平均値 0、分散 σ_v^2 。

$h(k)$ が時間の区分的多項式で変動すると考え、 $\mathbf{x}_m(k) = [\mathbf{h}^T(k) \mathbf{h}_{(1)}^T(k) \dots \mathbf{h}_{(m)}^T(k)]^T \in \mathbb{R}^l$ とすると、

$$\mathbf{x}_m(k+1) = \Theta_m \mathbf{x}_m(k) \quad (2)$$

$$\Theta_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & T\mathbf{I}_n & \dots & \frac{1}{m!}T^m\mathbf{I}_n \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T\mathbf{I}_n \\ \mathbf{O}_n & \dots & \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

T はサンプリング時間とする。 $\mathbf{x}_u(k) = \mathbf{u}(k)$ とすると、

$$\mathbf{x}_u(k+1) = \Phi \mathbf{x}_u(k) + \gamma w(k), w(k) = u(k+1) \quad (3)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

さらに、 $\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}_u^T(k) \mathbf{x}_m^T(k)]^T \in \mathbb{R}^p$ とし、(1)~(3) より以下の拡大システムモデルを得る。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}w(k) \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Theta_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$y(k) = [\mathbf{x}_u^T(k) \mathbf{0}] \mathbf{x}_m(k) + v(k) := f(\mathbf{x}(k)) + v(k) \quad (5)$$

以上より、ブライント等化問題は (4),(5) で表される非線形システムの状態推定問題に帰着される。

3 適応等化器の設計

非線形変換を受ける確率変数 $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ の統計量計算法として *Unscented Transformation*(UT) が提案されている。UT では $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ の平均 $\bar{\mathbf{x}}$ 、共分散 \mathbf{P}_x が既知のとき $\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{P}_y$ を次のように近似的に計算する。まず、 $\mathcal{X}_0 = \bar{\mathbf{x}}, \mathcal{X}_i = \bar{\mathbf{x}} \pm (\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_x})_i$ とし $2n+1$ 個の標本点により \mathbf{x} の分布を近似する。ただし $\kappa \in \mathbb{R}$ は自由度パラメータである。次に \mathcal{X}_i の変換点 $\mathcal{Y}_i = g(\mathcal{X}_i)$ から平均 $\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{Y}_i$ 、共分散 $\mathbf{P}_y = \sum_{i=0}^{2n} W_i [\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}][\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}]^T$

を求める。ただし、 $W_0 = \kappa/(n+\kappa)$ 、 $W_i = 1/2(n+\kappa)$ 。UT をカルマンフィルタに拡張して (4),(5) に適用し等化器を構成する。 $\bar{w} \neq 0$ のとき $w_k = \bar{w} + n_k$ (n_k : 平均 0 の雑音) とし、拡大状態ベクトル $\mathbf{x}_k^a = [\mathbf{x}_k^T \ n_k]^T \in \mathbb{R}^L$ に対する線形システムモデルを $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_k^a, \alpha_k)$ とする。UT による推定値と真値のモーメントを計算することにより、 κ の設定法として $2n+\kappa=1$ を導出した。逐次状態推定アルゴリズムは以下ようになる。

Step1: 初期値 $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0, \hat{\mathbf{x}}_0^a, \mathbf{P}_0^a$

Step2: $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a$ を $2L+1$ 個の \mathcal{X}^a (σ -points) で近似

$$\mathcal{X}_{k-1}^a = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a \ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a + \lambda \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a} \ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a - \lambda \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a}]$$

Step3: 時間更新

$$\mathcal{X}_{k|k-1}^x = \mathbf{G}(\mathcal{X}_{k-1}^x, \alpha_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1}^n), \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i \mathcal{X}_{i,k|k-1}^x$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i [\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}][\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]^T$$

$$\mathcal{Y}_{k|k-1} = f(\mathcal{X}_{k-1}^x), \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i \mathcal{Y}_{i,k|k-1}$$

Step4: 観測更新

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i [\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}][\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}]^T + \rho \sigma_v^2$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i [\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}][\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}]^T$$

$$\mathbf{K}_k = \rho^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k} \mathbf{K}_k^T$$

$k = k+1$ として **Step2** へ戻る。ただし、 $\lambda = \sqrt{L+\kappa}$ 、 $\mathcal{X}^a = [(\mathcal{X}^x)^T (\mathcal{X}^n)^T]^T$ とし、 ρ は忘却係数とする。

4 数値例

$n=4$ として伝送路のパラメータ $h(k)$ が正弦波状の未知の変動をもち、 $u(k)$ は 0,1 の 2 値信号、 $\sigma_u^2 = 0.25$ 、 $\sigma_v^2 = 10^{-3}$ とした場合の、 $m=2$ 、 $\kappa=-7$ に対するシミュレーション結果を示す。従来法として拡張カルマンフィルタ (EKF) と比較する。信号の誤り率は、提案法: 0、従来法: 0.0040 である。図 1 において実線が真値、破線が提案法、点線が従来法である。

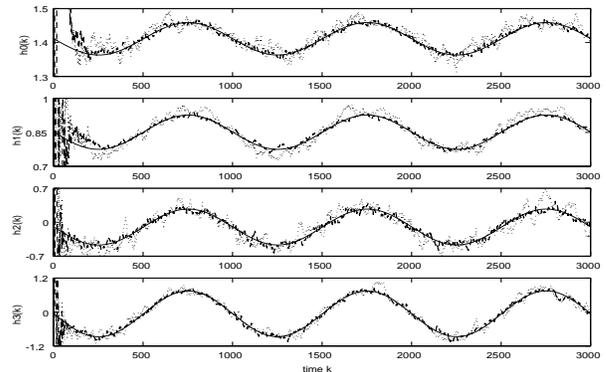


図 1: 時変 FIR システムの係数の真値と同定値

5 むすび

伝送路特性が時変の場合にパラメータと送信信号を状態変数としたシステムモデルに対して、カルマンフィルタを用いた新しい適応等化器を提案した。また、数値例により追従特性および誤り率特性において有効であることを示した。