2001-08-2

# 適応フィードフォワード補償器を用いたモータ速度制御

**80022231 関合 孝朗**　　　**指導教員 佐野 昭**

## 1　はじめに

モータのモデルを，制御系のフィードフォワード部分で推定し，速度制御を行う方法として，単純適応制御を応用する方法 [1] と適応 OAT フィルタを応用する方法を提案する．本稿ではそれらの手法の説明及び安定解析を行い，適応 OAT フィルタを用いた場合のシミュレーション結果を示す．

## 2　単純適応制御を応用する方法

図 1 に非線形摩擦を含むモータのモデルを示す．ここで，$T_M, D_M, a, c$ はそれぞれモータ時定数，速度に比例する粘性抵抗，速度 2 乗に比例する粘性抵抗，クーロン摩擦力を表している（ただし $\alpha \gg 1$）．このとき，図 2 のような規範モデルを用いることで，これらの物理パラメータの推定が可能となることを示す．

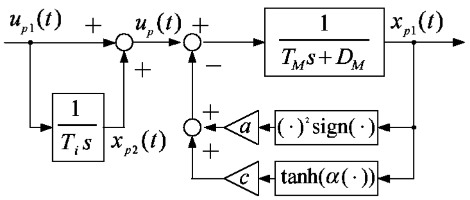


図 1: 非線形摩擦を含む制御対象

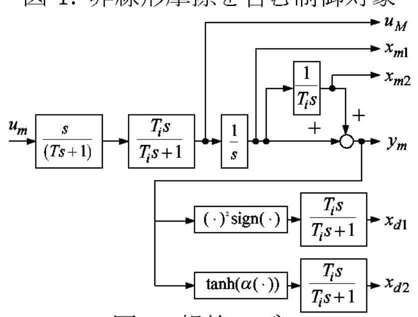


図 2: 規範モデル

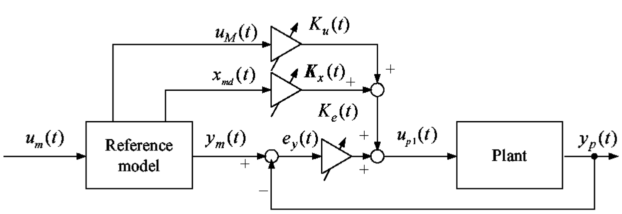


図 3: 制御系の構成図（１）

**[定理]** 図 1 に示された PI 制御器と 1 慣性系を制御対象とみなし，図 2 の規範モデルを用い，図 3 のように制御系を構成する．入力を（1）式のように与え，$e_{x1}(t) = x_{m1}(t) - x_{p1}(t), e_{x2}(t) = x_{m2}(t) - x_{p2}(t)$ が（2）式の領域内に存在するとする．

$$u_{p1} = \boldsymbol{K}^T(t)\boldsymbol{r}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} e_y(t) & \boldsymbol{x}_{md}(t) & u_M(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{x}_{md}(t) = \begin{bmatrix} x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & x_{d1}(t) & x_{d2}(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{K}(t) = \begin{bmatrix} K_e(t) & \boldsymbol{K}_x(t) & K_u(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{K}_x(t) = \begin{bmatrix} K_{x1}(t) & K_{x2}(t) & K_{d1}(t) & K_{d2}(t) \end{bmatrix}^T$$

$$e_y(t) = y_m(t) - y_p(t), \quad \dot{\boldsymbol{K}}(t) = e_y\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T > 0$$

$$\boldsymbol{D}_0(e_{x1}(t), e_{x2}(t)) = \left\{ e_{x1}(t), e_{x2(t)} \middle| -\infty < e_{x1} < \infty, \frac{\theta_2}{\beta} < |e_{x2}(t)| < \frac{\beta}{\theta_1} \right\} \tag{2}$$

このとき適応パラメータが（3）式を満たし，またすべての内部信号が有界となる．

$$\lim_{t\to\infty} K_{x1}(t) = D_M, \lim_{t\to\infty} K_{x2}(t) = 0, \lim_{t\to\infty} K_u(t) = T_M$$
$$\lim_{t\to\infty} K_{d1}(t) = a, \lim_{t\to\infty} K_{d2}(t) = c \tag{3}$$

**[証明]** 図 1 の制御対象を（4）式で表す．

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p(t) = \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{b}_p u_{p1}(t) + \boldsymbol{A}_{\gamma p}\boldsymbol{\gamma}(y_p(t))$$
$$y_p(t) = \boldsymbol{c}_p^T\boldsymbol{x}_p(t) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \begin{bmatrix} x_{p1}(t) \\ x_{p2}(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}(y_p(t)) = \begin{bmatrix} |y_p|y_p \\ \tanh(\alpha \cdot y_p) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_p = \begin{bmatrix} -D_M/T_M & 1/T_M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_p = \begin{bmatrix} 1/T_M \\ 1/T_i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_p^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{\gamma p} = \begin{bmatrix} -a/T_M & -c/T_M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

また，図 2 の規範モデルは（5）式で表される．

$$\dot{\boldsymbol{x}}_m(t) = \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{x}_m(t) + \boldsymbol{b}_m u_M(t) + \boldsymbol{A}_{\gamma m}\boldsymbol{\gamma}(y_m(t))$$
$$y_m(t) = \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x}_m(t) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}_m(t) = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ x_{m3} \\ x_{m4} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}(y_m(t)) = \begin{bmatrix} |y_m|y_m \\ \tanh(\alpha \cdot y_m) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/T_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/T_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/T_i \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{\gamma m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/T_i & 0 \\ 0 & -1/T_i \end{bmatrix}$$

理想入力 $u_p^*(t)$ と理想状態 $\boldsymbol{x}_p^*$ を（6）式のように表す．

$$\boldsymbol{x}_p^*(t) = \boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{x}_m(t) + \boldsymbol{S}_{12}u_M(t)$$
$$u_p^*(t) = \boldsymbol{S}_{21}^T\boldsymbol{x}_m(t) + \boldsymbol{S}_{22}u_M(t) + \boldsymbol{S}_\gamma^T\boldsymbol{\gamma}(y_p^*(t)) \tag{6}$$

（4），（5），（6）式より，（7）式を得る．

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_p^*(t) &= [\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{S}_{11} + \boldsymbol{b}_p\boldsymbol{S}_{21}^T]\boldsymbol{x}_m(t) + [\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{S}_{12} \\ &\quad + \boldsymbol{b}_p S_{22}]u_M(t) + [\boldsymbol{b}_p\boldsymbol{S}_\gamma + \boldsymbol{A}_\gamma]\boldsymbol{\gamma}(y_m(t)) \\ &= \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{x}_m(t) + \boldsymbol{b}_m\boldsymbol{S}_{11}u_M(t) + \boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{A}_{\gamma m}\end{aligned}$$

$$y_m(t) = \boldsymbol{c}_p\boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{x}_m(t) + \boldsymbol{c}_p\boldsymbol{S}_{12}u_M(t) = \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x}_m(t) \tag{7}$$

（7）式より，（8）式が成立する．

$$\boldsymbol{A}_{\gamma p} + \boldsymbol{b}_p\boldsymbol{S}_\gamma = \boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{A}_{\gamma m}, \boldsymbol{A}_p\boldsymbol{S}_{11} + \boldsymbol{b}_p\boldsymbol{S}_{21}^T = \boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{A}_m$$
$$\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{S}_{12} + \boldsymbol{b}_p S_{22} = \boldsymbol{S}_{11}\boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{c}_p^T\boldsymbol{S}_{11} = \boldsymbol{c}_m^T, \boldsymbol{c}_p^T\boldsymbol{S}_{12} = 0 \tag{8}$$

ここで（8）式を満たす $\boldsymbol{S}_{11}$，$\boldsymbol{S}_{12}$，$\boldsymbol{S}_{21}$，$S_{22}$，$\boldsymbol{S}_\gamma$ を求めると，次のようになる．

$$\boldsymbol{S}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ T_M/T_i & D_M & -a & -c \end{bmatrix}, \boldsymbol{S}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{21}^T = \begin{bmatrix} D_M & 0 & a & c \end{bmatrix}, S_{22} = T_M, \boldsymbol{S}_\gamma = \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}^T$$

したがって，理想入力 $u_p^*(t)$ は

$$u_p^*(t) = D_M x_{m1}(t) + a x_{d1}(t) + c x_{d2}(t) + T_M u_M(t) \quad (9)$$

で与えられる．また，誤差方程式は（10）式となる．

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_x(t) &= \dot{\boldsymbol{x}}_p^*(t) - \dot{\boldsymbol{x}}_p(t) \\ &= \boldsymbol{A}_p^* \boldsymbol{e}_x(t) + \boldsymbol{b}_p (\boldsymbol{K}^* - \boldsymbol{K}(t))^T \boldsymbol{r}(t) \\ &\quad + \boldsymbol{A}_{\gamma p}[\boldsymbol{\gamma}(y_m(t)) - \boldsymbol{\gamma}(y_p(t))] \\ e_y(t) &= y_m(t) - y_p(t) = \boldsymbol{c}_p^T \boldsymbol{e}_x(t) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $\boldsymbol{e}_x(t) = \boldsymbol{x}_p^*(t) - \boldsymbol{x}_p(t), \boldsymbol{A}_p^* = \boldsymbol{A}_p - K_e^* \boldsymbol{b}_p \boldsymbol{c}_p^T$, $\boldsymbol{K}^* = [\, K_e^* \quad \boldsymbol{S}_{21}^T \quad \boldsymbol{S}_{\gamma}^T \quad \boldsymbol{S}_{22} \,]$ である．(10) 式の線形部分は強正実性を満たすので，(11) 式を満たす $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > 0$，$\boldsymbol{Q} \geq 0$ が存在する．

$$\boldsymbol{A}_p^* \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_p^* = -\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P} \boldsymbol{b}_p = \boldsymbol{c}_p \quad (11)$$

次に，(11) 式を満たす $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > 0$，$\boldsymbol{Q} \geq 0$ を求める．

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

ここで，$P_{11} = T_M(1 - p/T_i)$，$P_{21} = P_{12} = p$，$P_{22} = -T_i p/T_M$，$Q_{11} = 2(D_M + K_e^* - D_M p/T_i)$，$Q_{12} = Q_{21} = D_M p/T_M - p/T_i - 1$，$Q_{22} = -2p/T_M$ であり，$p$ は $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > 0$，$\boldsymbol{Q} \geq 0$ を満足するように選ぶ．リアプノフ関数の候補として（12）式を選ぶ.

$$V(t) = \boldsymbol{e}_x^T(t) \boldsymbol{P} \boldsymbol{e}_x(t) + (\boldsymbol{K}(t) - \boldsymbol{K}^*)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{K}(t) - \boldsymbol{K}^*) \quad (12)$$

（12）式の時間微分をすると，(13) 式になる．

$$\dot{V} = -\boldsymbol{e}_x \boldsymbol{Q} \boldsymbol{e}_x + 2 \boldsymbol{e}_x^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_{\gamma p}[\boldsymbol{\gamma}(y_m) - \boldsymbol{\gamma}(y_p)] \quad (13)$$

ここで，(14) 式の関係を用いて（13）式の右辺第２項を変形すると，(15) 式になる．

$$\begin{aligned} \| |y_m| y_m - |y_p| y_p \| &\leq a' |e_{x1}|^2 \\ \| \tanh(\alpha y_m) - \tanh(\alpha y_p) \| &\leq c' \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & 2 \boldsymbol{e}_x^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}_{\gamma p} [\boldsymbol{\gamma}(y_m) - \boldsymbol{\gamma}(y_p)] \\ &= -2a(1 - p/Ti) e_{x1} (|y_m| y_m - |y_p| y_p) \\ &\quad -2c(1 - p/Ti) e_{x1} (\tanh(\alpha \cdot y_m) - \tanh(\alpha \cdot y_p)) \\ &\quad -2a(p/T_M) e_{x2} (|y_m| y_m - |y_p| y_p) \\ &\quad -2c(p/T_M) e_{x2} (\tanh(\alpha \cdot y_m) - \tanh(\alpha \cdot y_p)) \\ &\leq \theta_1 |e_{x1}|^2 |e_{x2}| + \theta_2 |e_{x2}| \end{aligned} \quad (15)$$

ここで $\theta_1 = 2|paa'/T_M| > 0$，$\theta_2 = 2|pcc'/T_M| > 0$ であり，また $\beta = \lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})$ と定義すると，(16) 式に変形できる．

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\beta e_{x1}^2 - \beta e_{x2}^2 + \theta_1 |e_{x1}|^2 |e_{x2}| + \theta_2 |e_{x2}| \\ &= -e_{x1}^2 (\beta - \theta_1 |e_{x2}|) - e_{x2}^2 (\beta - \theta_2 / |e_{x2}|) \end{aligned} \quad (16)$$

（2）式の領域内では $\dot{V}_2 \leq 0$ となり安定性が保証される．■

## 3 適応 OAT フィルタを応用する方法

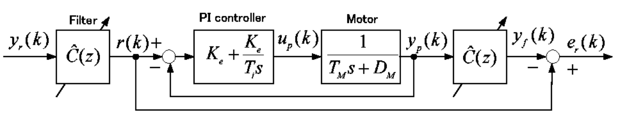


図 4: 制御系の構成図（２）

OAT フィルタは次のように与えられる [2].

$$C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \quad (17)$$

ただし $c_0 = 1/M, c_1 = -2\cos(\omega_d T_d) e^{-\zeta \omega_n T_d}/M, c_2 = e^{-2\zeta \omega_n T_d}/M, M = 1 - 2\cos(\omega_d T_d) e^{-\zeta \omega_n T_d} + e^{-2\zeta \omega_n T_d}, \omega_n = \sqrt{K_e/T_i T_M}, \zeta = (K_e + D_M)\sqrt{T_i/4K_e T_M}, \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ であり，$T_d$ はフィルタのサンプリング周期である．制御系として図４の構成をとり，フィルタの係数勾配法を用いて調整することを考える．評価関数を $V'(k) = (y_r(k) - y_p(k))^2/2$ として勾配を求めると，PI コントローラとモータで構成されるシステムへ $y_r(k)$ を入力として与えた信号の出力が必要となってしまうが，この信号を得ることはできない．そこで，(18) 式で表される評価関数 $V''(k)$ を最小にするように適応調整を行う．

$$V''(k) = (r(k) - y_f(k))^2/2 = e_r^2(k)/2 \quad (18)$$

調整則を次の２点に留意して求めると（19）式のようになる．

1. $\hat{c}_0(k) + \hat{c}_1(k) + \hat{c}_2(k) = 1$ を常に満足するようにプロジェクション法を用いる．
2. OAT フィルタは，ステップ入力に対して $2T_d$ の時間をかけてその入力に対する振動抑制行うので，ステップ入力が与えられてから $2T_d$ の時間の間は適応調整を行わない．

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\rho}}(k) - \gamma \boldsymbol{\Phi}(k) \quad (19)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(k) = [\hat{c}_0(k) \;\; \hat{c}_1(k) \;\; \hat{c}_2(k)]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi}(k) = [\phi(k) - \alpha(k) \;\; \phi(k-1) - \alpha(k) \;\; \phi(k-2) - \alpha(k)]^T$$

$$\phi(k) = (y_r(k) - 2y(k)) e_r(k)$$

$$\alpha(k) = (\phi(k) + \phi(k-1) + \phi(k-2))/3$$

ただし $|r(k) - r(k-1)| < 10^{-9}, |r(k) - r(k-2)| < 10^{-9}$ の時に適応調整を行う．

## 4 シミュレーション結果

物理パラメータ及び設計パラメータを次のようにした．$T_M = 0.269[s], D_M = 0.1[Nms/rad], K_e = 1, T_i = 0.01$ とする．このときのシステムは固有各周波数 $\omega_n = 19.3[rad/s]$，減衰係数 $\zeta = 0.11$ の振動系となる．また，フィルタのサンプリング周期 $T_d = 100[ms]$，適応ゲイン $\gamma = 10^4$，初期値 $\hat{\rho}(0) = [1/3 \;\; 1/3 \;\; 1/3]$，制御のサンプリング周期 $T_s = 1[ms]$ とした．$T_d$ の値は観測雑音に対する影響を考慮して決定した．

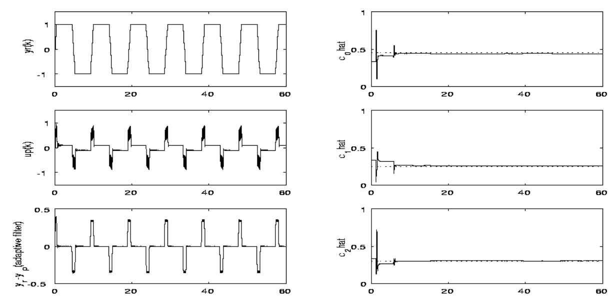


図 5: OAT フィルタを用いたモータ速度制御

図５の左図は上から規範信号 $y_r(k)$，制御入力 $u_p(k)$，出力誤差 $y_p(k)$ を示しているが，ランプ状の規範信号が入っていないところでは速度制御ができていることが確認できる．右図は適応 OAT フィルタの係数の推定値を示している．真値を点線で示しているが，それぞれ真値に収束していることが確認できる．

## 5 結論

適応フィードフォワード補償器を用いてモータ速度制御を行う方法を説明した．単純適応制御を応用した方法では，安定性をの証明を行った．また，シミュレーションを通して，適応 OAT フィルタを用いてモータの速度制御を行うことができることを示した．

## 参考文献

[1] Takaaki Sekiai *et al.*,"On-Line Tuning of One-Mass Motor Drive System by Simple Adaptive Control", IFAC ALCOSP, pp. 359-364, 2001

[2] David P. Magee and Wayne J. Book,"Optimal Filtering to Minimize the Elastic Behavior in Serial Link Manipulators", Proceedings of the ACC, pp. 2637-2642, 1998