多種生物モデルの安定解析と計算機シミュレーション

学籍番号 80023277　山田一成　　指導教員　国松昇

1　概要

本研究の目的は多種生物モデルの振る舞いを理論的に解析するための手法の提案と, コンピュータによるシミュレーションである. 取り扱う多種生物モデルとは, ロトカ・ボルテラ (Lotka-Volterra) 方程式の一般形および, その 3 生物系である.

振る舞いを解析するために, リャプノフの安定理論 (LaSalle の定理) と線形化手法を利用した. 特にロトカ・ボルテラ方程式の 3 生物モデルの場合について, システムの振る舞いをより詳しく解析するためにコンピュータによるシミュレーションを行った.

2　リャプノフの安定理論 (LaSalle の定理)

取り扱うロトカ・ボルテラ方程式の一般形は以下の式で定義される.

$$\dot{x}_i = x_i(1 - \sum_{j=0}^{n-1} c_j x_{i+j}), \qquad i = 0, \cdots, n-1 \quad (1)$$

このとき, リャプノフ関数 V を以下のように定義する.

$$V = PS^{-n} \quad (2)$$

ただし

$$P = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$$
$$S = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$$

この関数は, $x \in \mathrm{bd}\ R_+^n$ のとき最小値 $V = 0$ を持つと同時に,$x \in \{L : x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-1}\}$ のとき最大値 $V = 1/n^n$ を持つというリャプノフ関数として特別な性質を持つ. そのため, 関数 V の導関数 $\dot{V}$ がすべての $x \in \mathrm{int}\ R_+^n$ において常に負値を取るとき,int R_+^n から出発したシステムの状態 x は bd R_+^n に収束する. 逆に $\dot{V}$ が $x \in \{L : x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-1}\}$ を除くすべての $x \in \mathrm{int}\ R_+^n$ において常に正値を取る場合, 状態 x は簡単な計算により, $x = \bar{x} = (\gamma_0^{-1}, \gamma_0^{-1}, \ldots \gamma_0^{-1})$, (ただし$\gamma_0 = c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}$) に漸近的に収束することが分かる.

3　システムの線形化

ロトカ・ボルテラ方程式の 3 生物系を以下に示す.

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= x_0(1 - c_0x_0 - c_1x_1 - c_2x_2) \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_1(1 - c_2x_0 - c_0x_1 - c_1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(1 - c_1x_0 - c_2x_1 - c_0x_2) \end{aligned} \quad (3)$$

このシステムの int R_+^3 における唯一の平衡点は $\bar{x} = (\gamma_0^{-1}, \gamma_0^{-1}, \gamma_0^{-1})$(ただし$\gamma_0 = c_0 + c_1 + c_2$) である. この平衡点 $\bar{x}$ における Jacobian は以下のようになる.

$$-\frac{1}{\gamma_0}\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

この行列の固有値の実数部がすべて負であれば, 平衡点 $\bar{x}$ における安定性を判別することが出来る.
固有値は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} -\lambda_0 &= c_0 + c_1 + c_2 \\ -\lambda_1 &= c_0 - \frac{c_1 + c_2}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1 - c_2) \\ -\lambda_2 &= c_0 - \frac{c_1 + c_2}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1 - c_2) \end{aligned} \quad (5)$$

したがって, $c_0 > \frac{c_1+c_2}{2}$ のとき平衡点 $\bar{x}$ は安定となり, $c_0 > \frac{c_1+c_2}{2}$ のとき平衡点 $\bar{x}$ は不安定となることが分かる.

4　結果

前述の 2 種類の解析手法を併用することで, ロトカ・ボルテラ方程式の 3 生物系は, システムのパラメータが $c_0 > \frac{c_1+c_2}{2}$ のとき状態 x は平衡点 $\bar{x}$ に収束し,$c_0 = \frac{c_1+c_2}{2}$ のとき状態 x はリミットサイクル $\{PS^{-3} = 0\}$ に落ち込み,$c_0 > \frac{c_1+c_2}{2}$ のとき状態 x は領域 bd R_+^3 に落ち込むことが分かった. シミュレーションの結果を当日披露する.

参考文献

[1] HOFBAUER J. On The Occurrence of Limit Cycles in the Volterra-Lotka Equation Nonliner Analysis, Theory, Methods & Appl. Vol.5, No.9, pp.1003-1007, 1981 ほか