

# 需要供給モデルにおける動的市場価格のモデリングとその応用

80023067 三浦 貴治

指導教員 大森 浩充

## 1 はじめに

近年、マルチエージェントを用いた経済システムのモデリングの研究が盛んに行われている。経済システムは大規模複雑系システムであるため、そのシステムをモデリングすることは、システムの多面性ゆえに定式化が困難であるため難しい問題である。しかし、経済システムの一側面である、ある一つの市場に対する各エージェントの買い手、売り手それぞれの需要・供給関係から市場価格が発生する過程に焦点をあて、モデリングする際に、モデル駆動制御を利用することによって解決策が見えてくる。本稿で提案する市場モデルの特徴は、(i) ミクロマクロの2層からなり、(ii) ミクロマクロ間の双方向リンクが存在し、(iii) マクロレベルが創発性を有する点である。最後に提案モデルを DRAM 市場に適用し提案モデルの有効性を示す。

## 2 問題設定

ある種類の資産の市場に  $m$  人の producer と  $n$  人の consumer が存在する。1 人の producer が市場に対する供給量を  $S_j(k)$ 、consumer の市場に対する需要量を  $D_i(k)$  とする。producer 個々の資産評価額を  $\hat{V}_j(k)$ 、consumer の資産評価額を  $V_i(k)$  とする。 $k$  ステップにおいて決定された市場価格を  $P(k)$  とする。

### (i) ミクロレベル

producer, consumer のミクロな内部モデルを構成する。

#### ① producer の内部モデル

以下の評価関数を最大化することによって、 $k$  ステップでの供給量を決定する。

$$U_j(k) = \hat{V}_j(k)S_j(k) - K_j(S_j(k)) \quad (1)$$

$K_j$  は、コスト関数で、 $K' > 0, K'' > 0 \forall S_j \geq 0$  とする。

(1) で求めた  $S_j(k)$  を入力として、以下の状態方程式で資産評価額を更新する。

$$\hat{V}_j(k+1) = g_j(\hat{\mathbf{V}}(k), S_j(k)) \quad (2)$$

市場に公表する希望価格を次の出力方程式で求める。

$$\hat{y}_j(k+1) = \hat{V}_j(k+1) + \hat{c}_j(P(k) - P(k-1)) \quad (3)$$

$\hat{c}_j$  : 各 producer agent の市場価格変化に対する反応係数。

#### ② consumer の内部モデル

以下の評価関数を最大化することによって、 $k$  ステップでの需要量を決定する。

$$\tilde{U}_i(k) = \Phi_i(D_i(k)) - V_i(k)D_i(k) + w_i \quad (4)$$

$\Phi_i' < 0, \Phi_i'' < 0 \forall D_i(k) \geq 0$  とし、 $w_i$  は consumer agent に配分された初期資金とする。

(4) で求めた  $D_i(k)$  を入力として、以下の状態方程式で資産評価額を更新する。

$$V_i(k+1) = f_i(\mathbf{V}(k), D_i(k)) \quad (5)$$

市場に公表する希望価格を次の出力方程式で求める。

$$y_i(k+1) = V_i(k+1) + c_i(P(k) - P(k-1)) \quad (6)$$

$c_i$  : 各 consumer agent の市場価格変化に対する反応係数。

### (ii) マクロレベル

資産の市場価格が以下のように決定されると仮定する。

$$P(k+1) = \frac{1}{2} \{ \max(y_i(k+1)) + \min(\hat{y}_j(k+1)) \} \quad (7)$$

但し、 $\min(y_i(k+1)) \geq \max(\hat{y}_j(k+1))$  ならば、

$$P(k+1) = P(k) \quad (8)$$

### agent の特性について

ここで、両 agent の状態方程式を供給 (需要) 量に関する一次関数とすると、 $a_j(\hat{\mathbf{V}}(k))$  (または  $c_i(\mathbf{V}(k))$ ) を切片、 $b_j(k)$  (または  $d_i(k)$ ) が傾き (収穫率) になる。DRAM のようなハードウェアは一般に「収穫逓減」の作用が働くので、エージェントに依存するある閾値  $S_j^*$  (または  $D_i^*$ ) を境にして傾き (収穫率) が減る。

## 3 モデル駆動制御

前述の市場モデルを制御対象として、モデル駆動制御を用いた市場価格の一制御手法を提案する。

### ① producer サイド

コスト関数  $K_j(k)$  を以下の様に設定する。

$$K_j(S_j(k)) = \hat{V}_j^2(k+1) \quad (9)$$

$$= g_j^2(\hat{\mathbf{V}}(k), S_j(k)) \quad (10)$$

$g_j$  は input-decoupled 形なので以下の様における。

$$g_j(\hat{\mathbf{V}}(k), S_j(k)) = a_j(\hat{\mathbf{V}}(k)) + b_j(k)S_j(k) \quad (11)$$

この式を再び、 $K_j(S_j(k))$  に代入すると、

$$-K_j(S_j(k)) = p_j(k) + q_j(k)S_j(k) + r_j(k)S_j^2(k) \quad (12)$$

$$p_j(k) = -a_j^2(\hat{\mathbf{V}}(k)), \quad q_j(k) = -2b_j(k)a_j(\hat{\mathbf{V}}(k)),$$

$$r_j(k) = -b_j^2(k) \text{ とおく.}$$

$-K_j$  を最大化した時の  $S_j(k)$  は

$$S_j(k) = \frac{-q_j(k)}{2r_j(k)} \quad (13)$$

供給量  $S_j(k)$  は正なので、次のように書き直す。(  $r_j(k)$ : 正 )

$$S_j(k) = \text{sign}(q_j(k)) |S_j(k)| \quad (14)$$

この式を再び (12) 式に代入すると、

$$-K_j(|S_j(k)|) = p_j(k) + |q_j(k)||S_j(k)| + r_j(k)|S_j(k)|^2 \quad (15)$$

この式を  $U_j(k)$  に代入し、最大化すると、次の入力が必要。

$$|S_j(k)| = \frac{\hat{V}_j(k) + |q_j(k)|}{-2r_j(k)} \quad (16)$$

## ② consumer サイド

効用関数  $\Phi_i(k)$  を以下の様に設定する.

$$\Phi_i(D_i(k)) = -V_i^2(k+1) \quad (17)$$

$$= -f_i^2(\mathbf{V}(k), D_i(k)) \quad (18)$$

$\mathbf{f}_i$  は input-decoupled 形なので以下の様における.

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{V}(k), D_i(k)) = c_i(\mathbf{V}(k)) + d_i(k)D_i(k) \quad (19)$$

この式を再び,  $\Phi_i(D_i(k))$  に代入すると,

$$\Phi_i(D_i(k)) = \alpha_i(k) + \beta_i(k)D_i(k) + \gamma_i(k)D_i^2(k) \quad (20)$$

$$\alpha_i(k) = -c_i^2(\mathbf{V}(k)), \quad \beta_i(k) = -2d_i(k)c_i(\mathbf{V}(k)),$$

$$\gamma_i(k) = -d_i^2(k) \text{ とおく.}$$

$\Phi_i$  を最大化した時の  $D_i(k)$  は

$$D_i(k) = \frac{-\beta_i(k)}{2\gamma_i(k)} \quad (21)$$

需要量  $D_i(k)$  は正で, 次のように書き直す. ( $\gamma_i < 0$ )

$$D_i(k) = \text{sign}(\beta_i(k))|D_i(k)| \quad (22)$$

この式を再び, (21) 式に代入すると,

$$\Phi_i(|D_i(k)|) = \alpha_i(k) + |\beta_i(k)||D_i(k)| + \gamma_i(k)|D_i(k)|^2 \quad (23)$$

これを  $\tilde{U}_i(k)$  に代入し, 最大化すると, 次の入力が出る.

$$|D_i(k)| = \frac{V_i(k) - |\beta_i(k)|}{2\gamma_i(k)} \quad (24)$$

## 4 モデル駆動制御の安定性証明

### ① producer の戦略安定性

producer agent の入力は次式である.

$$|S_j(k)| = \frac{\hat{V}_j(k) + |q_j(k)|}{-2r_j(k)} \quad (25)$$

$$S_j(k) = \text{sign}(q_j(k))|S_j(k)| \quad (26)$$

producer agent の状態方程式は次式である.

$$\hat{V}_j(k+1) = a_j(\hat{V}(k)) + b_j(k)S_j(k) \quad (27)$$

(26), (27) 式を (28) 式に代入する.

$$\hat{V}_j(k+1) = \frac{\text{sign}(b_j(k)a_j(k))\hat{V}_j(k)}{2b_j(k)} \quad (28)$$

次に, リアプノフ関数  $\hat{L}_i(k)$  を以下のように定義する.

$$\hat{L}_i(k) = \hat{V}_i(k)^2 \quad (29)$$

リアプノフ関数の差分が負になるための条件は,  $|b_j(k)| > \frac{1}{2}$  であり, この時, producer の戦略安定性が保たれる.

### ② consumer の戦略安定性

consumer の入力は次の式である.

$$|D_i(k)| = \frac{V_i(k) - |\beta_i(k)|}{2\gamma_i(k)} \quad (30)$$

$$D_i(k) = \text{sign}(\beta_i(k))|D_i(k)| \quad (31)$$

consumer agent の状態方程式は次式である.

$$V_i(k+1) = c_i(\mathbf{V}(k)) + d_i(k)D_i(k) \quad (32)$$

(31), (32) 式を (33) 式に代入する.

$$V_i(k+1) = \frac{-\text{sign}(-d_i(k)c_i(k))V_i(k)}{2d_i(k)}$$

同様に, リアプノフ関数  $\hat{L}_j(k)$  を以下のように定義する.

$$\hat{L}_i(k) = V_i(k)^2 \quad (33)$$

リアプノフ関数の差分が負になるための条件は,  $|d_i(k)| > \frac{1}{2}$  であり, この時, consumer の戦略安定性が保たれる.

## 5 DRAM 市場への応用

提案モデルを DRAM 市場に適用し, データの再現性とその有効性を確認する. producer の初期資産評価額を 56000, consumer の値を 48000 とし,  $a_j(k), c_j(k)$  は状態に対して線形関数を取り,  $b_j(k), d_j(k)$  は安定性を満たす数を割り振った. なお, 係数は適宜変えることによって, 実データにフィットさせた. シミュレーション時間は 20 ステップである. 両 agent の閾値は  $S_j^* = 11500, \hat{S}_i^* = 6000$  とした. 下図は実データと提案モデルによるデータの比較のグラフである.

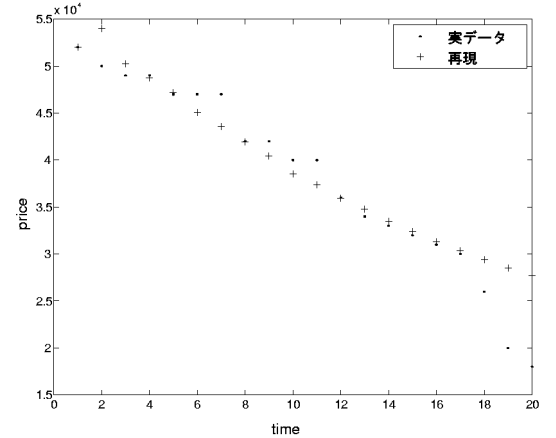


図 1: シミュレーション結果

## 6 まとめ

本稿において動的市場価格モデルを構築し, その安定性の証明をおこない, さらに DRAM 市場への適用により, 提案モデルの有効性を示した.

## 参考文献

- [1] A.Sato, H.Takayasu; "Dynamic numerical models of stock market price" Physica A, no.250, 1998.
- [2] H.Voos, L.Litz; "Market-based control; A general introduction" Proceeding of the American Control Conference Chicago, Illinois, June, 2000.
- [3] 生天目 章; マルチエージェントと複雑系, 森北出版.
- [4] 柴 直樹; "産業構造の進化のシミュレーション" 組織科学, 2000, Vol.34, No.2, p.p.46-58.