カオス制御系に対する時間遅れフィードバックと不安定周期の推定

80022924 藤村 智之　　　指導教員 大森 浩充

1　まえがき

近年カオスに対し，様々な制御法が示されてきた．その１つに時間遅れフィードバック制御法を用いた不安定周期軌道 (UPO) の安定化が提案されている．この制御法は目標軌道の周期の τ 時間前と現在の出力の差によるフィードバック制御法である．しかしこの制御法には，奇数条件と呼ばれている本質的な適用限界がある．本論文では，この奇数条件を解消すると共に，UPO の周期 τ をオンラインで自動推定する適応機構を提案する．

2　問題設定

以下の n 次元連続時間システムを考える．

$$\dot{x}(t) = f(x) + u \tag{1}$$

$x \in R^n$ は状態，$u \in R^n$ は制御入力，$f(x)$ は微分可能関数．ここで，安定化する周期軌道 $\bar{x}(t)$ は周期 τ をもち，以下をみたす．

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}) \quad and \quad \bar{x}(t) = \bar{x}(t-\tau) \tag{2}$$

入力として現在と τ 時間前の情報を用いて，システムの軌道を τ 周期軌道に収束させ UPO を安定化する．また，周期 τ を適応推定器により推定する．

3　時間遅れフィードバックによる UPO の安定

以下のように $\psi(x(t))$，$\psi'(x(t))$，$\psi''(x(t))$ をおく．

$$\psi(x(t)) = \int_{t-\tau}^{t} f(x(s))ds \tag{3}$$

$$\psi'(x(t)) = f(x(t)) - f(x(t-\tau)) \tag{4}$$

$$\psi''(x(t)) = \frac{d}{dt}f(x(t)) - \frac{d}{dt}f(x(t-\tau)) \tag{5}$$

以下のような評価関数を設定する．

$$\begin{aligned} J \quad = \quad & \int_{t_0}^{\infty} [\psi^{\tau}(x(t))\Gamma\psi(x(t)) \\ & +\psi'^{\tau}(x(t))\Lambda\psi'(x(t)) + \psi''^{\tau}(x(t))\psi''(x(t))]dt \end{aligned} \tag{6}$$

$\Gamma = \Gamma^T \in R^{n\times n}$，$\Lambda = \Lambda^T \in R^{n\times n}$ は正定行列．

[**定理**] 以下のように重み行列をおく．

$$2\Gamma^{\frac{1}{2}} - \Lambda > 0 \quad and \quad \Lambda\Gamma = \Gamma\Lambda$$

このとき，以下のコントローラによって (6) が最小となる．

$$\begin{aligned} u(t) = & -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t))\right]^{-1}\left[-\frac{\partial f}{\partial x}(x(t-\tau))(f(x(t-\tau)) + u(t-T\tau))\right. \\ & \left. +\frac{\partial f}{\partial x}(x(t))f(x(t)) + L(f(x(t)) - f(x(t-\tau))) + G\int_{t-\tau}^{t} f(x(s))ds\right] \end{aligned} \tag{7}$$

ここで $G = \Gamma^{\frac{1}{2}}$，　$L = (\Gamma^{\frac{1}{2}} - \Lambda)^{\frac{1}{2}}$ とする．さらに，行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -G & -L \end{pmatrix} \tag{8}$$

が，すべての固有値を複素平面の左半平面にもつとき，

$$\lim_{t\to\infty} \psi(x(t)) = 0,\ \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\psi(x(t)) = 0,\ \lim_{t\to\infty} \frac{d^2}{dt^2}\psi(x(t)) = 0$$

4　UPO の周期 τ の推定

時間遅れフィードバック制御は UPO の周期 τ は既知でなければならない．そこで，正確な周期 τ を以下の 2 つの方法を用いて推定する．

・勾配法による推定

以下のような評価関数を設定する．

$$E = \frac{1}{2}\|x(t) - x(t-\hat{\tau})\|^2 \tag{9}$$

このとき周期 T の調整則は以下のようになる．

$$\dot{\hat{\tau}} = -\beta\frac{\partial E}{\partial\hat{\tau}}, \quad \beta > 0 \tag{10}$$

・適応調整則

$$F(\tau) = \frac{d^2}{dt^2}\psi(x(t)) + L\frac{d}{dt}\psi(x(t)) + G\psi(x(t)) \tag{11}$$

$F(\hat{\tau}) = 0$ となる $\hat{\tau}$ を推定する．$z = [\psi^T, \frac{d}{dt}\psi^T]^T$，$\bar{F}(\hat{\tau}) = \frac{\partial F(\tau)}{\partial\tau}|_{\tau=\hat{\tau}}$，$b = [0 \quad I]^T$ とすると (11) は以下のようになる．

$$\dot{z} = Mz + b\bar{F}(\hat{\tau})\tilde{\tau}$$

ここでリアプノフ関数の候補 $V = z^TPz + \tilde{\tau}^2$ について，以下の $\dot{\hat{\tau}}$ により $\dot{V} \le 0$ となる．

$$\dot{\hat{\tau}} = -\bar{F}^Tb^TPz \tag{12}$$

5　シミュレーション結果

勾配法の手法を用いて，以下の $R\ddot{o}ssler$ システムについて，シミュレーションをおこなった．

$$\dot{x}(t) = f(x) + u(t), \qquad f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_1 + ax_2 \\ x_1x_3 - cx_3 + b \end{pmatrix}$$

ここで，$a = b = 0.2$，$c = 5.7$，$\beta = 5$，$k_0 = 0.2$，$x(0) = [0\ 0\ 0]^T$，$\tau_0 = 5$．

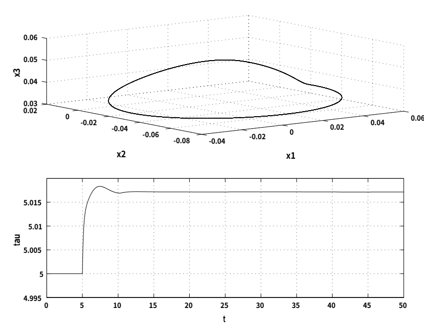

図 1: UPO の安定化：状態 $x(50s - 100s)$ と周期 $\hat{\tau}$

6　結論

本論文の手法により，UPO の周期 τ をオンラインで自動推定し，また奇数条件に関係なくその周期 τ の UPO を安定化することができた．