

入力むだ時間を含む線形系に対する制御設計法

80022216 杉本 充

指導教員 大森 浩充

1 研究の背景と目的

化学反応系, 温度・濃度調節系, 遠距離通信系, 交通システムなど「むだ時間」を含むシステムの例は多い. むだ時間系に対する適応制御系の構成問題において, 制御誤差を直接パラメータ駆動誤差として用いる構成法は, むだ時間系が非最小位相系であるため, これまで提案されてこなかった. ここでは制御誤差を直接用いている. さらに, IQC (Integral Quadratic Constraint) に基づいた安定性解析を行う. IQC は, スモールゲイン定理・受動定理などのフィードバック系の安定条件の統一的な記述を与え, むだ時間要素などを含む取り扱いが難しい制御系の安定条件を得ることが可能である.

2 適応制御

プラントを, 入力むだ時間を含むシステムとして

$$y(t) = g \frac{r(s)}{p(s)} u(t-L) \quad (1)$$

とする. L は既知むだ時間, $r(s)$ と $p(s)$ は各々 m 次, n 次 monic 多項式で, $0 \leq m \leq n-1$ とする. $r(s)$ と $p(s)$ は互いに素である. 単に説明の簡単のために $p(s)$ は重根をもっていないとする. 安定な規範モデルを

$$y_m(t) = g_d \frac{r_d(s)}{p_d(s)} v_m(t-L) \quad (2)$$

とする. $r_d(s)$ と $p_d(s)$ は各々 m_d 次, n_d 次 monic 多項式である. ここで, 一般性を失うことなく $g = g_d = 1$ とする. つぎの仮定をおく.

(A1) $r(s)$ は安定多項式.

(A2) $n_d - m_d \geq n - m$.

さらに, m 次, n 次任意 monic 安定多項式 $r^*(s)$, $p^*(s)$ を用い, つぎのような入力ダイナミクスを設ける.

$$t_{IN}(s) = \frac{r_d(s) p^*(s)}{p_d(s) r^*(s)} \quad (3)$$

$t_{IN}(s)$ は明らかにプロパーかつ安定である. また, $\bar{v}_m(t) = t_{IN}(s) v_m(t)$ とする.

ここから, exact model matching を達成するための, すなわち, プラントの出力 $y(t)$ を規範モデルの出力 $y_m(t)$ に一致させるための制御法則を考える.

まず, $n+m-1$ 次式の $r^*(s) p(s) - r(s) p^*(s)$ に対して, $\{r^*(s) p(s) - r(s) p^*(s)\} / \{r^*(s) p(s)\}$ を部分分数に展開し, つぎのようにおく.

$$\frac{r^*(s) p(s) - r(s) p^*(s)}{r^*(s) p(s)} = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\beta_i}{s - z_i} \quad (4)$$

(説明の便宜上 $r^*(s) p(s)$ は重根をもたないものとした.) これから, つぎの式によって, $n+m$ 次 monic 多項式 $\phi(s)$ を定義することができる.

$$\frac{r^*(s) p(s) - \phi(s)}{r^*(s) p(s)} = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\beta_i e^{z_i L}}{s - z_i} \quad (5)$$

そして, つぎの多項式方程式をたてる. ただし, ここで $\gamma(s)$ を $n-m-1$ 次の任意 monic 安定多項式とする.

$$k(s) p(s) + h(s) r(s) = \gamma(s) r^*(s) p(s) - \gamma(s) \phi(s) \quad (6)$$

右辺は $2n-2$ 次であり, $n-2$ 次の $k(s)$ と $n-1$ 次の $h(s)$ は唯一つに決まる.

したがって, プラントが既知であるときは, プラントの出力 $y(t)$ を規範モデルの出力 $y_m(t)$ に一致させるための制御法則としてつぎのような式を用いる [1].

$$u(t) = \theta_r^T \omega_r(t) + \int_{-L}^0 \lambda(\sigma) u(t+\sigma) d\sigma + \bar{v}_m(t) \quad (7)$$

ここで

$$k(s) = k_{n-2} s^{n-2} + \cdots + k_0 \quad (8)$$

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + \cdots + h_0 \quad (9)$$

$$\theta_r = [k_{n-2}, \dots, k_0, h_{n-1}, \dots, h_0]^T \quad (10)$$

$$\omega_r(t) = \left[\frac{s^{n-2}}{\gamma(s) r^*(s)} u(t-L), \dots, \frac{1}{\gamma(s) r^*(s)} u(t-L), \right. \\ \left. \frac{s^{n-1}}{\gamma(s) r^*(s)} y(t), \dots, \frac{1}{\gamma(s) r^*(s)} y(t) \right]^T \quad (11)$$

$$\lambda(\sigma) = \sum_{i=1}^{n+m} \beta_i e^{-z_i \sigma} \quad (12)$$

である.

適応制御においては, θ_r , $\lambda(\sigma)$ は未知である (むだ時間 L は既知). ゆえに, 推定値 $\hat{\theta}_r(t)$, $\hat{\lambda}(t, \sigma)$ を用いて, 適応制御での制御法則はつぎのようになる.

$$u(t) = \hat{\theta}_r^T(t) \omega_r(t) + \int_{-L}^0 \hat{\lambda}(t, \sigma) u(t+\sigma) d\sigma + \bar{v}_m(t) \quad (13)$$

3 問題設定

適応制御における誤差を

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (14)$$

と定義する. この誤差システムは (15) 式で表される. ただし, $\tilde{\theta}(t, \sigma) \triangleq \hat{\theta}(t, \sigma) - \theta(\sigma) = [\hat{\theta}_r^T(t) - \theta_r^T, \hat{\lambda}(t, \sigma) - \lambda(\sigma)]^T$, $\omega(t, \sigma) \triangleq [\omega_r^T(t), u(t+\sigma)]^T$ である.

また, $\hat{\lambda}(t, \sigma) - \lambda(\sigma)$ と $u(t+\sigma)$ については, $[-L, 0]$ の上での σ に関する関数空間の内積で, $\int_{-L}^0 (\hat{\lambda}(t, \sigma) - \lambda(\sigma)) u(t+\sigma) d\sigma$ である. $W(s) = r_d(s)/p_d(s)$ であり, 規範モデルの集中定数部となる. 目標は, すべての信号が有界となるように $\hat{\theta}(t, \sigma)$ を調整するための適応則を導き出すことである.

$$e(t) = W(s) e^{-Ls} \left[(\tilde{\theta}(t, \sigma) | \omega(t, \sigma)) \right] \quad (15)$$

4 適応則の導出

まず, $\tilde{\theta}(t, \sigma)$ をつぎのように定義する.

$$\tilde{\theta}(t, \sigma) = \frac{g_\theta \omega(t, \sigma)}{c + \langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle} v_e(t) \quad (16)$$

c は小さな正数, g_θ は任意ゲインスカラー定数である. ここで

$$\langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle = \langle \omega_r(t) | \omega_r(t) \rangle + \int_{-L}^0 \{u(t+\sigma)\}^2 d\sigma \quad (17)$$

$$v_e(t) = \left(-\frac{1}{s} \right) e(t) \quad (18)$$

である．また， α は $\alpha > 0$ なる定数である． $\hat{\theta}(t, \sigma)$ には真値（一定値）が含まれているので微分することが必要であり， $s\hat{\theta}(t, \sigma) = s\hat{\theta}(t, \sigma)$ であることを考慮すると， $\hat{\theta}(t, \sigma)$ を調整する適応則として

$$\frac{s\alpha}{s+\alpha}\hat{\theta}(t, \sigma) = \left\{ \frac{s\alpha}{s+\alpha} \left(\frac{g_\theta \omega(t, \sigma)}{c + \langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle} v_e(t) \right) \right\} \quad (19)$$

を得る．以上，適応則をまとめるとつぎようになる．これらの適応則と (13) 式の制御法則によって適応制御が達成される．

$$\hat{\theta}_r(t) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{s\alpha}{s+\alpha} \left(\frac{g_\theta \omega_r(t)}{c + \langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle} v_e(t) \right) \right\} + \int_0^t \left\{ \frac{s\alpha}{s+\alpha} \left(\frac{g_\theta \omega_r(t)}{c + \langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle} v_e(t) \right) \right\} dt \quad (20)$$

$$\hat{\lambda}(t, \sigma) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{s\alpha}{s+\alpha} \left(\frac{g_\theta u(t+\sigma)}{c + \langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle} v_e(t) \right) \right\} + \int_0^t \left\{ \frac{s\alpha}{s+\alpha} \left(\frac{g_\theta u(t+\sigma)}{c + \langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle} v_e(t) \right) \right\} dt \quad (21)$$

5 IQC 安定性解析

はじめに，(22) 式のようなフィードバック系を考える．

$$\begin{cases} v = Gw + f_1 \\ w = \Delta(v) + f_2 \end{cases} \quad (22)$$

G と Δ のフィードバック系と IQC との関係はつぎのように定義される [2] ．

定義 1 (IQC)

$\Pi(j\omega)$ を有界なエルミート行列とする． Δ を \mathcal{L}_2 安定で因果的なシステム（非線形時変でもよい）とする． Δ の入力 $v \in \mathcal{L}_2$ と出力 $w \in \mathcal{L}_2$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0 \quad (23)$$

を満足するとき， Δ は $\Pi(j\omega)$ による IQC を満たすという．ただし， $\hat{v}(j\omega)$ ， $\hat{w}(j\omega)$ は， $v(t)$ ， $w(t)$ のフーリエ変換，* は共役転置を表す．

補題 1 (IQC)

$G(s)$ はプロパーな実有理関数行列でその極はすべて複素平面左半面（内部安定）であるとする．また， Δ は因果的で \mathcal{L}_2 安定であるとする．このとき

- 【1】すべての $\rho \in [0, 1]$ に対して， $G(s)$ と $\rho\Delta$ のフィードバックシステムは \mathcal{L}_{2e} 上で因果的な逆写像をもつ（ $G(s)$ と $\rho\Delta$ は well-posed）．
- 【2】すべての $\rho \in [0, 1]$ に対して， $\rho\Delta$ は $\Pi(j\omega)$ による IQC を満たす．

【3】つぎのような $\varepsilon > 0$ が存在する．

$$\begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\varepsilon I, \quad \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (24)$$

以上の条件が成立すれば， $G(s)$ と Δ のフィードバックシステムは安定（ \mathcal{L}_2 安定）である [2] ．

ここで，(16) 式のもとに，(15) 式の誤差システムを等価的にループを変換すると，つぎのように LFT 表現ができる．ただし， δ は $\delta > 0$ なる定数である．

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & W & W \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{G(s)} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+\delta} & 0 & 0 \\ 0 & \left\{ g_\theta \left[\frac{\langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle}{c + \langle \omega(t, \sigma) | \omega(t, \sigma) \rangle} \right] \right\} & 0 \\ 0 & 0 & (e^{-Ls} - 1) \end{bmatrix}}_{\Delta} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

(25)，(26) 式の関係は，(22) 式のフィードバック系になる．従って，IQC 安定性解析が可能である．補題 1 の条件の成立・不成立，すなわち，提案適応則を用いたときのこのむだ時間系の安定・不安定（安定性解析）は [3] で確かめることができる．このとき， δ ，適応則に含まれる g_θ ，むだ時間 L の条件が得られる．そしてこれらの値はこの系の安定性に反映される．

6 数値例

提案適応則を適応制御入力に用いた数値例として，プラント出力と規範モデル出力を比較した．この結果を図 1 に示す．

各パラメータの設定は， $L = 0.2$ ， $r(s) = s + 3$ ， $p(s) = (s + 1)(s + 2)$ ， $r_d(s) = s + 6$ ， $p_d(s) = (s + 4)(s + 5)$ ， $p^*(s) = (s + 7)(s + 8)$ ， $r^*(s) = s + 9$ ， $\gamma(s) = 1$ ， $\alpha = 1$ ， $c = 0.1$ ， $g_\theta = 1.2$ とした．

ここで， $\delta = 0.01$ としたとき， $L = 0.2$ ， $g_\theta = 1.2$ という設定のもとでは，補題 1 の条件が成立することが [3] によって確かめられる（ $\Pi(j\omega)$ の選択例は [3] 参照）．従って，このパラメータ設定のとき，この適応制御系は安定である．

プラントの（集中定数部の）状態の初期値は 2 つとも 1.7 とし，規範入力 $v_m(t)$ を $v_m(t) = \sin t + 0.5 \sin 0.1t$ ，規範モデルの（集中定数部の）状態の初期値は 2 つとも 0 とした．

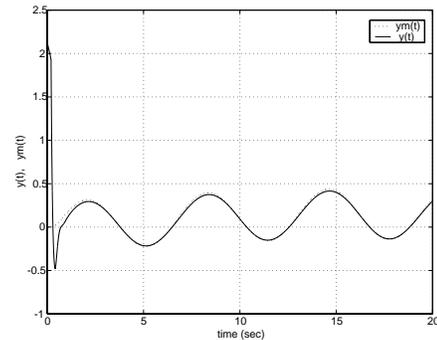


図 1: 提案適応則を用いた適応制御系のプラント出力と規範モデル出力

7 結論

むだ時間適応制御系に対する適応則を提案し，その誤差システムは IQC により安定性解析が可能であることを明らかにした．この提案適応則は，従来の拡張誤差を用いる適応則 [1] とは異なった新しいものであり，さらにその安定性は実際に [3] により確かめることができた．

参考文献

- [1] 市川 邦彦，制御系設計法 [VII] 第 7 章 むだ時間系の制御，計測と制御，Vol.23, No.12. 1984.
- [2] A.Megretski and A.Rantzer, System Analysis via Integral Quadratic Constraints, *IEEE Trans.on Automatic Control*, vol.42, No.6, pp.819-830, 1997.
- [3] Ulf Jönsson, Anders Rantzer, A Matlab Toolbox for System Analysis via Integral Quadratic Constraints, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, January 1997.